Problème A : calcul de $\zeta(2)$

1) La formule de DE MOIVRE donne :

$$\cos nx + i\sin nx = e^{inx} = \left(e^{ix}\right)^n = (\cos x + i\sin x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cos^{n-j} x \cdot i^j \cdot \sin^j x$$

d'où, en séparant les termes de rangs pairs et impairs, qui fournissent respectivement parties réelle et imaginaire :

$$\cos nx = \sum_{0\le 2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} x\cdot \sin^{2k} x \quad \text{et} \quad \sin nx = \sum_{0\le 2k+1\le n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1} x\cdot \sin^{2k+1} x$$

ou encore, puisque par hypothèse $\cos x$ est non nul :

$$\cos nx = \cos^n x\cdot \sum_{0\le 2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k} \tan^{2k} x \quad \text{et} \quad \sin nx = \cos^n x\cdot \sum_{0\le 2k+1\le n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \tan^{2k+1} x$$

d'où, puisqu'on a supposé en outre $\cos nx \neq 0$:

$$\boxed{\tan nx = \frac{P(\tan x)}{Q(\tan x)} \quad \text{avec} \quad P(X) = \sum_{0\le 2k+1\le n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} X^{2k+1} \quad \text{et} \quad Q(X) = \sum_{0\le 2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{2k}.}$$

2) **a)** Avec les notations précédentes, pour $n = 2p+1$, k varie de 0 à p :

$$\boxed{P(X) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{2k+1} X^{2k+1} \text{ convient.}}$$

b) P est un polynôme de degré n, de coefficient dominant $(-1)^p$, et admet pour racines les $\tan\theta_k$, $-p\le k\le p$ (en effet : $P(\tan\theta_k) = Q(\tan\theta_k)\cdot \tan n\theta_k = 0$). En outre, les θ_k, $-p\le k\le p$, sont n valeurs distinctes de l'intervalle $]-\pi/2,\pi/2[$, donc les $\tan\theta_k$, $-p\le k\le p$, sont n réels distincts (puisque tan induit une bijection de $]-\pi/2,\pi/2[$ dans $\mathbb{R}$). J'ai ainsi tous les éléments de la factorisation de P :

$$P(X) = (-1)^p \prod_{k=-p}^{p} (X - \tan\theta_k) \ ;$$

comme $\theta_0 = 0$ et comme $\theta_{-k} = \theta_k$, j'obtiens en regroupant $(X - \tan\theta_k)$ et $(X - \tan\theta_{-k})$, pour $1\le k\le p$:

$$\boxed{P(X) = (-1)^p \prod_{k=-p}^{p} (X - \tan\theta_k) = (-1)^p X \prod_{k=1}^{p} \left(X^2 - \tan^2\theta_k\right)}$$

c) J'ai par construction : $P(X) = X\cdot A\left(X^2\right)$, donc A admet pour racines les $\tan^2\theta_k$, $1\le k\le p$, qui sont p réels distincts, tandis que A est un polynôme de degré p ; par conséquent :

$$\boxed{\text{Les racines de } A \text{ sont les } \tan^2\theta_k,\ 1\le k\le p.}$$

De même, pour tout réel x non nul,

$$x^{2p+1} P\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{2p-2k} = B\left(x^2\right).$$

J'en déduis comme ci-dessus que

$$\boxed{\text{Les racines de } B \text{ sont les } \frac{1}{\tan^2\theta_k} = \cot^2\theta_k,\ 1\le k\le p.}$$

d) Les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé me donnent en particulier la somme des racines de A et de B :

$$\sum_{k=1}^{p} \tan^2\theta_k = -\frac{(-1)^{p-1}\binom{2p+1}{2p-1}}{(-1)^p\binom{2p+1}{2p+1}} = \binom{2p+1}{2} = \frac{(2p+1)(2p)}{2}$$

et

$$\sum_{k=1}^{p} \cot^2\theta_k = -\frac{(-1)^1\binom{2p+1}{3}}{(-1)^0\binom{2p+1}{1}} = \frac{\binom{2p+1}{3}}{2p+1} = \frac{(2p+1)(2p)(2p-1)}{6(2p+1)}$$

soit, après simplification :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p}\tan^2\theta_k = p\,(2p+1) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{p}\cot^2\theta_k = \frac{p\,(2p-1)}{3}.}$$

3) Le premier encadrement s'obtient par exemple en étudiant les variations sur $[0,\pi/2[$ des fonctions $x \mapsto x - \sin x$ et $x \mapsto \tan x - x$ (elles sont strictement croissantes, nulles en 0) :

$$\boxed{\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\quad \sin x < x < \tan x.}$$

Ainsi, pour tout x de $]0,\pi/2[$, j'ai : $0 < \cot x < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\sin x}$ d'où, en élevant au carré :

$$\boxed{\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\quad \cot^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \cot^2 x.}$$

4) J'applique l'encadrement précédent aux θ_k, $1 \le k \le p$ (qui sont bien dans $]0,\pi/2[$!) et j'ajoute membre à membre les inégalités obtenues :

$$\sum_{k=1}^{p}\cot^2\theta_k < \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\theta_k^2} < p + \sum_{k=1}^{p}\cot^2\theta_k$$

soit, grâce au **2)d) :**

$$\frac{p\,(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} < p + \frac{p\,(2p-1)}{3}\ .$$

J'en déduis

$$\frac{p\,(2p-1)}{(2p+1)^2}\cdot\frac{\pi^2}{3} < \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} < \frac{p\,(2p+2)}{(2p+1)^2}\cdot\frac{\pi^2}{3}$$

or,

$$\frac{p\,(2p-1)}{(2p+1)^2}\xrightarrow[p\to\infty]{}\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{p\,(2p+2)}{(2p+1)^2}\xrightarrow[p\to\infty]{}\frac{1}{2}$$

d'où, grâce au théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} \text{ existe et vaut } \frac{\pi^2}{6}.}$$

Problème B : polynômes à coefficients 1 ou –1

Pour deux séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de même longueur ℓ, je noterai

$$c_j = \sum_{i=0}^{\ell-1-j}(a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j}) \quad \text{pour tout entier } j \text{ vérifiant } 0 \le j \le \ell - 1,$$

de sorte que la j^{e} condition de corrélation s'écrit $c_j = 0$.

Notons que $c_0 = \sum\limits_{i=0}^{\ell-1}\left(a_i^2 + b_i^2\right)$ n'est pas pris en compte pour la définition d'une paire complémentaire.

Première partie

1) Pour $\ell = 2$, l'unique condition de corrélation s'écrit $a_0 a_1 + b_0 b_1 = 0$; ainsi par exemple $(1,1)$ et $(1,-1)$ forment une paire complémentaire de longueur 2 : $2 \in \mathcal{L}$.

Supposons un instant que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une paire complémentaire de longueur 3, c'est-à-dire que

$$c_1 = a_0 a_1 + b_0 b_1 + a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0 \quad \text{et} \quad c_2 = a_0 a_2 + b_0 b_2 = 0.$$

Comme toutes les composantes valent ± 1,

- soit $b_2 = b_0$: dans ce cas $c_2 = 0$ donne $a_0 a_2 = -1$, donc $a_2 = -a_0$ et $c_1 = 2b_0 b_1$, ce qui est absurde ;
- soit $b_2 = -b_0$: dans ce cas $c_2 = 0$ donne $a_0 a_2 = 1$, donc $a_2 = a_0$ et $c_1 = 2a_0 a_1$, tout aussi absurde.

En conclusion il ne peut exister de paire complémentaire de longueur 3.

$$\boxed{2 \in \mathcal{L} \quad \text{et} \quad 3 \notin \mathcal{L}.}$$

2) a) Notons

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(x) = P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) + P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1}).$$

Dans le cas où $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont de longueurs distinctes, comme elles jouent des rôles symétriques, je peux supposer que $\underline{a}$ est de longueur ℓ strictement supérieure à celle de $\underline{b}$. Or par définition

$$\forall x > 0 \quad P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) = \left(\sum_{i=0}^{\ell-1} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\ell-1} a_i x^{-i}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_0 a_{\ell-1} x^{\ell-1} \ ;$$

en effet, en développant j'obtiens une somme de “monômes” en x, avec des exposants relatifs au plus égaux à $\ell - 1$, comportant un unique terme en $x^{\ell-1}$, avec un coefficient non nul (car a_0 et $a_{\ell-1}$ valent ± 1 !). Comme $P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1})$ admet un équivalent similaire d'exposant strictement inférieur, j'ai $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_0 a_{\ell-1} x^{\ell-1}$ or $\ell \geq 2$ donc

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas bornée sur } \mathbb{R}^{+*}.}$$

Voyons de plus près le développement, pour $x \neq 0$, en changeant les noms des indices pour éviter les télescopages :

$$P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) = \left(\sum_{p=0}^{\ell-1} a_p x^p\right)\left(\sum_{q=0}^{\ell-1} a_q x^{-q}\right) = \sum_{(p,q)\in[\![0,\ell-1]\!]^2} a_p a_q x^{p-q}.$$

Dans cette somme, se trouvent les termes correspondant à $p = q$, de somme $\sum_{p=0}^{\ell-1} a_p^2$, les termes où $p > q$ et ceux où $p < q$. Je réindexe en remarquant que (faire un dessin, je regroupe les couples selon la valeur de $j = p - q$...) :

$$\left\{(p,q) \in [\![0,\ell-1]\!]^2 \ / \ p > q\right\} = \bigcup_{j=1}^{\ell-1} \left\{(i+j, i)\,,\ i \in [\![0, \ell-1-j]\!]\right\}$$

d'où l'expression de la somme :

$$\sum_{p>q} a_p a_q x^{p-q} = \sum_{j=1}^{\ell-1}\left(\sum_{i=0}^{\ell-1-j} a_{i+j} a_i x^j\right) = \sum_{j=1}^{\ell-1}\left(\sum_{i=0}^{\ell-1-j} a_{i+j} a_i\right) x^j.$$

En traitant de même la somme des termes où $p < q$, j'obtiens

$$P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) = \sum_{p=0}^{\ell-1} a_p^2 + \sum_{j=1}^{\ell-1}\left(\sum_{i=0}^{\ell-1-j} a_{i+j} a_i\right)\left(x^j + x^{-j}\right)$$

puis, en ajoutant les termes similaires provenant de $\underline{b}$,

$$\varphi(x) = c_0 + \sum_{j=1}^{\ell-1} c_j \left(x^j + x^{-j}\right).$$

Il est donc clair que, si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une paire complémentaire, φ est constante. Réciproquement, si φ est constante, l'ensemble $\{j \in [\![1, \ell-1]\!] \ / \ c_j \neq 0\}$ est nécessairement vide, sinon φ ne serait pas bornée (considérer le plus grand élément dudit ensemble et faire tendre x vers $+\infty$) ; c'est dire que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une paire complémentaire.

$$\boxed{\underline{a} \text{ et } \underline{b} \text{ forment une paire complémentaire si et seulement si } \varphi \text{ est constante.}}$$

Si c'est le cas ladite constante est $c_0 = \sum_{i=0}^{\ell-1}\left(a_i^2 + b_i^2\right) = 2\ell$ puisque les a_i et les b_i valent ± 1.

b) Soit $\underline{a}$ de longueur ℓ et $n_{\underline{a}}$ le nombre de valeurs de i dans $[\![0,\ell-1]\!]$ telles que $a_i=-1$; les autres composantes valant 1,

$$P_{\underline{a}}(1)=\sum_{i=0}^{\ell-1}a_i=\left(\ell-n_{\underline{a}}\right)+\left(-n_{\underline{a}}\right)=\ell-2n_{\underline{a}}.$$

Ainsi, $P_{\underline{a}}(1)$ est un entier relatif de même parité que ℓ. En particulier :

$\boxed{\text{Si } \underline{a} \text{ et } \underline{b} \text{ ont même longueur, } P_{\underline{a}}(1) \text{ et } P_{\underline{b}}(1) \text{ sont deux entiers de même parité.}}$

Soit $\ell\in\mathcal{L}$ et $\underline{a}$, $\underline{b}$ deux séquences de longueur ℓ formant une paire complémentaire ; d'après ce qui précède, je dispose de deux entiers p et q tels que $P_{\underline{a}}(1)=p$ et $P_{\underline{b}}(1)=p+2q$, d'où

$$\varphi(1)=P_{\underline{a}}(1)^2+P_{\underline{b}}(1)^2=2p^2+4pq+2q^2=2\left[(p+q)^2+q^2\right],$$

or $\varphi(1)=2\ell$ d'après le **a)**, donc

$$\ell=(p+q)^2+q^2$$

qui est bien la somme de deux carrés d'entiers !

$\boxed{\text{Tout élément de } \mathcal{L} \text{ peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.}}$

c) Je remarque que $(2p)^2=4p^2$ tandis que $(2p+1)^2=4(p^2+p)+1$; il en résulte que, pour u et v entiers, le reste de la division euclidienne de u^2+v^2 par 4 vaut :

* 0 si u et v sont pairs ;
* 2 si u et v sont impairs ;
* 1 si l'un est pair et l'autre impair.

Donc les entiers de la forme $4q+3$ ne peuvent appartenir à $\mathcal{L}$, or il y en a une infinité dans $\mathbb{N}$!

$\boxed{\mathbb{N}\backslash\mathcal{L} \text{ est infini.}}$

3) a) Un calcul rapide montre que, en notant ψ la fonction $x\mapsto U(x)U(x^{-1})+V(x)V(x^{-1})$ et avec les notations du **2)**, $\psi=\varphi/2$, donc d'après **2)a)**,

$\boxed{\underline{a} \text{ et } \underline{b} \text{ forment une paire complémentaire si et seulement si } \psi \text{ est constante.}}$

b) Avec l'exemple de l'énoncé, l'expression de ψ est moins lourde que celle de φ...

$$U(x)=1+x-x^2+x^3+x^5 \quad \text{et} \quad V(x)=x^4(-1-x^2-x^3+x^4+x^5)$$

d'où, tous calculs faits, pour $x\neq 0$, $\psi(x)=10$!

$\boxed{\underline{a} \text{ et } \underline{b} \text{ forment une paire complémentaire.}}$

4) Avec les notations du **2)b)**, $P_{\underline{v}}(1)=2\left(m-n_{\underline{v}}\right)$. Il en résulte que **(i)** équivaut à **(ii)**. Par ailleurs le produit $v_0v_1\dots v_{2m-1}$ comporte exactement $n_{\underline{v}}$ facteurs égaux à -1, les autres valant 1 ; donc $v_0v_1\dots v_{2m-1}=(-1)^{n_{\underline{v}}}$. Il en résulte que **(ii)** équivaut à **(iii)**. En conclusion,

$\boxed{\text{Les trois assertions sont équivalentes.}}$

5) a) Ici $\ell\geq 2$ et je fixe j dans $[\![1,\ell-1]\!]$. Soit $\underline{v}$ la séquence fournie par l'énoncé ; elle est de longueur paire $2m$, avec $m=\ell-j\in\mathbb{N}^*$. Or la somme de ses composantes est nulle (c'est c_j et $\underline{a}$, $\underline{b}$ forment une paire complémentaire !) ; comme 0 est multiple de 4, la question précédente me donne

$$v_0v_1\dots v_{2m-1}=(-1)^m,$$

autrement dit, en remettant les facteurs en ordre ;

$$\boxed{\prod_{k=0}^{\ell-1-j}x_kx_{k+j}=(-1)^{\ell-j}, \text{ cela pour tout } j \text{ dans } [\![1,\ell-1]\!].}$$

b) Je note, pour $j \in [\![0, \ell-1]\!]$, $\pi_j = \prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k x_{k+j} = \prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k \prod_{k=j}^{\ell-1} x_k$ donc, pour $j \in [\![0, \ell-2]\!]$,

$$\pi_j \pi_{j+1} = \prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k \prod_{k=j}^{\ell-1} x_k \prod_{k=0}^{\ell-2-j} x_k \prod_{k=j+1}^{\ell-1} x_k = x_{\ell-1-j} x_j$$

puisque tous les carrés valent 1. Or d'après **a)** $\pi_j = (-1)^{\ell-j}$, d'où $\pi_j\pi_{j+1} = -1$, *i.e.* $x_j x_{\ell-1-j} = -1$, cela pour tout j de $[\![0, \ell-2]\!]$.

Reste le cas $j = \ell-1$, qui revient au cas $j = 0$ par symétrie : $x_{\ell-1}x_0 = x_0 x_{\ell-1}$! Finalement,

$$\boxed{x_j x_{\ell-1-j} = -1, \text{ cela pour tout } j \text{ de } [\![0, \ell-1]\!].}$$

c) Par convention $1 \in \mathcal{L}$. Soit $\ell \geq 2$ dans $\mathcal{L}$. Si ℓ était impair, de la forme $\ell = 2q+1$, le résultat précédent donnerait, pour $j = q$, $x_q^2 = -1$, ce qui est absurde puisque x_q est un entier relatif. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Tout élément } \ell \geq 2 \text{ de } \mathcal{L} \text{ est pair.}}$$

Deuxième partie

6) **a)** Par définition,

$$\boxed{P_1 = 1 + X\ ;\ Q_1 = 1 - X\ ;\ P_2 = 1 + X + X^2 - X^3\ ;\ Q_2 = 1 + X - X^2 + X^3.}$$

b) Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} P_n(1) \\ Q_n(1) \end{pmatrix}$; par contruction la suite (U_n) vérifie la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = AU_n$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. D'où par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = A^n U_0$.

Or $A^2 = 2I_2$ (cela tient par exemple au fait que $\chi_A = X^2 - 2$, ou encore au fait que $\frac{1}{\sqrt{2}}.A$ est une matrice de symétrie orthogonale...), d'où en élevant à la puissance q, puis en multipliant par A,

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad A^{2q} = 2^q I_2 \quad \text{et} \quad A^{2q+1} = 2^q A.$$

Comme $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ il vient

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{N} \quad P_{2q}(1) = Q_{2q}(1) = 2^q\ ;\ P_{2q+1}(1) = 2^{q+1}\ ;\ Q_{2q+1}(1) = 0.}$$

De même (mais attention aux premiers termes !), $V_n = \begin{pmatrix} P_n(-1) \\ Q_n(-1) \end{pmatrix}$ vérifie $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\forall n \geq 1 \quad V_n = A^{n-1}V_1$, d'où

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{N}^* \quad P_{2q}(-1) = -Q_{2q}(-1) = 2^q\ ;\ P_{2q+1}(-1) = 0\ ;\ Q_{2q+1}(-1) = 2^{q+1}.}$$

7) Une première récurrence montre que P_n et Q_n sont de degré $2^n - 1$. Les monômes obtenus dans les relations de récurrence (1) et (2) sont donc de degrés tous distincts ; une deuxième récurrence montre alors que P_n et Q_n sont bien des polynômes séquentiels. P_0 et Q_0 forment une paire complémentaire par convention. Je montre enfin que, pour $n \in \mathbb{N}$, P_{n+1} et Q_{n+1} forment une paire complémentaire à l'aide du **I)3)a)** : les polynômes U et V associés sont P_n et $X^{2n}Q_n$, donc la fonction ψ associée est

$$\psi_n : x \mapsto P_n(x)P_n\left(x^{-1}\right) + Q_n(x)Q_n\left(x^{-1}\right).$$

Une troisième récurrence permet alors de montrer que ψ_n est constante. En effet, un calcul rapide montre que $\psi_{n+1} = 2\psi_n$, tandis que $\psi_0 = 2$ est bien constante.

Finalement,

$$\boxed{\text{Pour tout } n,\ P_n \text{ et } Q_n \text{ forment une paire complémentaire.}}$$

Nous venons donc de construire une paire complémentaire de séquences de longueur 2^n, cela pour tout n de $\mathbb{N}$ (les séquences formées par les coefficients de P_n d'une part, de Q_n d'autre part). Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } k \text{ de } \mathbb{N},\ 2^k \in \mathcal{L}.}$$

Mais $\mathcal{L}$ contient d'autres valeurs, comme 10 (cf. le **I)3)b)**)...

8) Nouvelle récurrence… Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_n)$ le prédicat : $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad Q_n(z) = (-1)^n z^{2^n-1} P_n(-z^{-1})$. $(\mathcal{P}_0)$ est vrai ($1 = 1$!) et $(\mathcal{P}_1)$ aussi $(1 - z = -z\left(1 - z^{-1}\right))$. Je suppose alors n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $(\mathcal{P}_n)$ soit vrai. En remplaçant z par $-z^{-1}$, j'obtiens, comme $2^n - 1$ est impair, pour $z \in \mathbb{C}^*$

$$Q_n(-z^{-1}) = (-1)^n \frac{-1}{z^{2^n-1}} P_n(z) \quad \text{d'où} \quad P_n(z) = (-1)^{n+1} z^{2^n-1} Q_n(-z^{-1})$$

d'où en réutilisant l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(z) &= (-1)^{n+1} z^{2^n-1} Q_n(-z^{-1}) - z^{2^n} (-1)^n z^{2^n-1} P_n(-z^{-1}) \\ &= (-1)^{n+1} z^{2^{n+1}-1} \left[z^{-2^n} Q_n(-z^{-1}) + P_n(-z^{-1})\right] \end{aligned}$$

soit, d'après (1), 2^n étant pair, $Q_{n+1}(z) = (-1)^{n+1} z^{2^{n+1}-1} P_{n+1}(-z^{-1})$, cela pour tout z de $\mathbb{C}^*$, donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vrai, ce qui achève la démonstration par récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad Q_n(z) = (-1)^n z^{2^n-1} P_n(-z^{-1}).}$$

9) a) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de T. J'ai $T(z) = 0$, d'où

$$z^d = -\sum_{i=0}^{d-1} \frac{t_i}{t_d} z^i.$$

Je note $M = \sup\limits_{0 \le i \le d-1} |t_i/t_d|$ (qui est en fait le plus grand élément d'une partie finie non vide de $\mathbb{C}$).

L'inégalité triangulaire donne : $|z|^d \le M \sum\limits_{i=0}^{d-1} |z|^i$.

Si $|z| \le 1$, j'ai aussitôt $|z| \le 1 + M$; sinon j'ai $|z| > 1$ et j'applique la formule relative aux suites géométriques :

$$|z|^d \le M \frac{|z|^d - 1}{|z| - 1} \quad \text{d'où} \quad |z| - 1 \le M \frac{|z|^d - 1}{|z|^d} \le M$$

(tous les facteurs sont strictement positifs). J'ai donc $|z| \le 1 + M$ dans tous les cas.

$$\boxed{\text{Les racines de } T \text{ sont majorées en module par } 1 + M.}$$

b) Supposons z racine de $P_n Q_n$. Déjà $z \neq 0$, puisque P_n et Q_n sont des polynômes séquentiels et ont donc un coefficient constant égal à ± 1. Pour la même raison, avec la notation précédente, le M associé à P_n et à Q_n vaut 1, or z est nécessairement racine de P_n ou de Q_n ($\mathbb{C}$ est intègre !). Donc, d'après **a)**, $|z| \le 2$. Et d'après **8)** $-z^{-1}$ est également racine de P_n ou de Q_n, d'où $\left|-z^{-1}\right| \le 2$, d'où $|z| \ge 1/2$. Finalement

$$\boxed{\frac{1}{2} \le |z| \le 2.}$$

Supposons un instant $|z| = 2$: la majoration du **a)** donnerait $2^d \le 1 \cdot \sum\limits_{i=0}^{d-1} 2^i = 2^d - 1$ d'où une contradiction ; nécessairement $|z| < 2$ et de même $\left|-z^{-1}\right| < 2$ donc

$$\boxed{\frac{1}{2} < |z| < 2.}$$

10) a) P_n et Q_n sont de degré $2^n - 1$, donc d'après (1) P_{n+1} est égal à P_n auquel on ajoute des monômes de degrés 2^n à $2^{n+1} - 1$ dont les coefficients valent ± 1. On construit ainsi la suite des sommes partielles d'une série entière dont (P_n) est une sous-suite et dont tous les coefficients valent ± 1. Il en résulte immédiatement que son rayon de convergence vaut 1.

b) Soit $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ la fonction somme de cette série entière et z dans $\mathbb{C}$ tel que $S(z) = 0$.

Supposons que $|z| < \dfrac{1}{2}$; j'aurais alors, les u_n étant tous non nuls,

$$u_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} u_n z^n \quad \text{d'où} \quad |u_0| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

d'où une contradiction, puisque $u_0 = \pm 1$. En conclusion,

$$\boxed{S \text{ n'a aucun zéro dans le disque ouvert de centre 0 de rayon } \frac{1}{2}.}$$