D.S. 1

Problème A : calcul de $\zeta(2)$

Le but du problème étant le calcul de $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$*, on fera comme si l'on ignorait sa valeur...*

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, et x réel tel que $\cos x \neq 0$ et $\cos nx \neq 0$. À l'aide de la formule de DE MOIVRE, démontrer que $\tan nx$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{P(\tan x)}{Q(\tan x)}$ où P et Q sont deux polynômes.

2) **a)** Si $n = 2p+1$ ($p \in \mathbb{N}^*$), montrer que l'on peut choisir au **1)**

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{2k+1} X^{2k+1}$$

b) On pose $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n}$, pour $-p \leq k \leq p$. Démontrer que :

$$P(X) = (-1)^p \prod_{k=-p}^{p} (X - \tan\theta_k) = (-1)^p X \prod_{k=1}^{p} \left(X^2 - \tan^2\theta_k\right)$$

c) On pose alors

$$A(Y) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{2k+1} Y^k \quad \text{et} \quad B(Z) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{2k+1} Z^{p-k}.$$

Quelles sont les racines des polynômes A et B ?

d) En déduire :

$$\sum_{k=1}^{p} \tan^2\theta_k = p(2p+1) \quad \textit{et} \quad \sum_{k=1}^{p} \cot^2\theta_k = \frac{p(2p-1)}{3}.$$

3) Montrer que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \sin x \leq x \leq \tan x.$$

En déduire :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \cot^2 x \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cot^2 x.$$

4) Déduire des questions précédentes la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Problème B : polynômes à coefficients 1 ou –1

Les polynômes étudiés dans ce problème ont été introduits lors de recherches sur la spectroscopie multifentes. Ils ont donné lieu à des développements mathématiques en combinatoire, théorie des codes, analyse harmonique et à de très nombreuses applications en optique, télécommunications, théorie des radars et acoustique. L'ensemble $\mathcal{L}$ étudié dans le problème est encore l'objet de recherches.

Toute affirmation devra être soigneusement justifiée. La précision, la clarté et la concision des raisonnements seront particulièrement appréciées.

Soit ℓ un entier au moins égal à 1. Dans ce problème, un vecteur $\underline{a}$ de $\mathbb{R}^\ell$ sera appelé *séquence de longueur* ℓ si chacune de ses ℓ coordonnées vaut 1 ou -1. Les coordonnées d'une séquence $\underline{a}$ de longueur ℓ seront numérotées de 0 à $\ell-1$, $\underline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-1})$. On notera $\mathcal{S}_\ell$ l'ensemble des séquences de longueur ℓ. On appellera simplement *séquence*, tout vecteur qui est une séquence de longueur ℓ, pour un certain entier $\ell \geq 1$.

On dira que des séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une *paire complémentaire* si elles ont même longueur ℓ (qui sera appelée dorénavant *longueur de la paire*) et si elles vérifient, dans le cas où $\ell > 1$, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq \ell - 1$, la j-ième *condition de corrélation* :

$$\sum_{i=0}^{\ell-1-j} (a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j}) = 0.$$

Par convention, tout couple de séquences de longueur 1 est une paire complémentaire. Ainsi, pour tout entier $\ell \geq 1$, la complémentarité d'une paire de longueur ℓ implique $\ell - 1$ conditions de corrélation.

Première partie

On désigne par $\mathcal{L}$ l'ensemble des entiers ℓ pour lesquels il existe au moins une paire complémentaire de longueur ℓ. Autrement dit, $\mathcal{L}$ est l'ensemble des longueurs de paires complémentaires. Dans cette partie, on se propose d'étudier certaines propriétés de l'ensemble $\mathcal{L}$.

1) Montrer que 2 appartient à $\mathcal{L}$ et que 3 n'appartient pas à $\mathcal{L}$.

Soit ℓ un entier au moins égal à 1. Pour toute séquence, $\underline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{\ell-1})$, de longueur ℓ, on définit le polynôme $P_{\underline{a}}$ par la formule

$$P_{\underline{a}}(X) = \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i X^i.$$

Un tel polynôme est appelé *polynôme séquentiel*.

2) a) Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences. On considère la fonction définie pour x réel, $x \neq 0$, par

$$x \mapsto P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) + P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1}).$$

Montrer que si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ ne sont pas deux séquences de même longueur, cette fonction n'est pas bornée sur $]0, +\infty[$.

Montrer que deux séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de même longueur forment une paire complémentaire si et seulement si cette fonction est constante. Exprimer cette constante en fonction de la longueur ℓ de la paire complémentaire $\underline{a}$, $\underline{b}$.

b) Montrer que si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont des séquences de même longueur, $P_{\underline{a}}(1)$ et $P_{\underline{b}}(1)$ sont des entiers de même parité. En déduire que tout élément de $\mathcal{L}$ peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.

c) Montrer que le complémentaire de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{N}$ est un ensemble infini [on pourra étudier le reste de la division par 4 d'un carré d'entier].

3) a) Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences de même longueur. On pose

$$U = \frac{1}{2}(P_{\underline{a}} + P_{\underline{b}}) \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{2}(P_{\underline{a}} - P_{\underline{b}}).$$

Montrer que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une paire complémentaire si et seulement si la fonction

$$x \mapsto U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1})$$

est constante sur son domaine de définition.

b) Les séquences, de longueur 10,

$$\underline{a} = (1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1)$$

et

$$\underline{b} = (1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1)$$

forment-elles une paire complémentaire?

4) Démontrer, pour toute séquence $\underline{v}$ de longueur paire $2m$ ($m \in \mathbb{N}$, non nul), l'équivalence des assertions suivantes :

(i) 4 divise la somme $v_0 + v_1 + \ldots + v_{2m-1}$,

(ii) le nombre de coordonnées de $\underline{v}$ égales à -1 a la même parité que m,

(iii) $v_0 v_1 \ldots v_{2m-1} = (-1)^m$.

5) Soit $\ell \in \mathcal{L}$, $\ell \geq 2$, et soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences qui forment une paire complémentaire de longueur ℓ. Pour tout entier i, $1 \leq i \leq \ell - 1$, on pose $x_i = a_i b_i$.

a) Montrer que, pour tout entier j, $1 \leq j \leq \ell - 1$,

$$\prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k x_{k+j} = (-1)^{\ell-j}$$

<u>*Indication*</u> : considérer la somme des coordonnées de la séquence

$$(a_0 a_j, \ldots, a_{\ell-1-j} a_{\ell-1}, b_0 b_j, \ldots, b_{\ell-1-j} b_{\ell-1}).$$

b) En déduire que, pour tout entier j, $0 \leq j \leq \ell - 1$,

$$x_j x_{\ell-1-j} = -1.$$

c) Montrer que tout élément ℓ de $\mathcal{L}$, $\ell \geq 2$, est pair.

Deuxième partie

Si deux polynômes séquentiels sont associés à des séquences qui forment une paire complémentaire, on dit qu'ils forment une *paire complémentaire de polynômes*. Cette partie est consacrée à l'étude de certaines paires complémentaires de polynômes, dites *paires de Rudin-Shapiro*.

On définit deux suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les conditions initiales

$$P_0(X) = Q_0(X) = 1$$

et les relations de récurrence

$$\begin{aligned} P_{n+1}(X) &= P_n(X) + X^{2^n} Q_n(X) &(1)\\ Q_{n+1}(X) &= P_n(X) - X^{2^n} Q_n(X). &(2) \end{aligned}$$

6) a) Calculer P_1 et Q_1, puis P_2 et Q_2.

b) Calculer les valeurs respectives de $P_n(1)$, $Q_n(1)$, $P_n(-1)$ et $Q_n(-1)$ en fonction de l'entier n.

7) Démontrer que, pour tout entier positif n, les polynômes P_n et Q_n sont des polynômes séquentiels et qu'ils forment une paire complémentaire. Qu'en déduire vis-à-vis de l'appartenance des entiers de la forme 2^k, pour k entier positif ou nul, à l'ensemble $\mathcal{L}$?

8) Démontrer, pour tout entier positif ou nul n et tout nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C}$, l'égalité

$$Q_n(z) = (-1)^n z^{2^n-1} P_n(-z^{-1}).$$

9) a) Soit T un polynôme quelconque de $\mathbb{C}[X]$, de degré exactement d, $d \geq 1$, qu'on écrit

$$T(X) = t_0 + t_1 X + \cdots + t_d X^d \quad \text{(avec } t_d \text{ non nul).}$$

Montrer que les racines de T sont toutes majorées en module par la quantité $1 + \sup\limits_{0\leq i\leq d-1} |t_i/t_d|$.

b) Démontrer, pour toute valeur de l'entier n, que toute racine (complexe) z du polynôme $P_n Q_n$ vérifie

$$\frac{1}{2} \leq |z| \leq 2.$$

Peut-on remplacer chacune de ces deux inégalités larges par une inégalité stricte?

10) *(Question subsidiaire réservée aux 5/2)*

a) Montrer qu'il existe une série entière, $S(z) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} u_p z^p$, dont les P_n sont des sommes partielles. Identifier son rayon de convergence.

b) La somme de la série S a-t-elle des zéros dans le disque ouvert de rayon 1/2 centré à l'origine ?

⋆ ⋆
⋆