Exercice 1

1) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, en vertu des théorèmes opératoires classiques, avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x - \cos(x+y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos y - \cos(x+y).$$

2) <u>*Analyse*</u> : supposons que $(x,y) \in \left]-\pi,\pi\right[^2$ est un point critique de f ; alors $\cos x = \cos y = \cos(x+y)$. Puisque x et y sont dans $\left]-\pi,\pi\right[$ et que $\cos x = \cos y$, j'ai deux possibilités :

- soit $x = y$: alors $\cos x = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, donc $\cos x$ est racine du polynôme
$$2X^2 - X - 1 = (2X+1)(X-1),$$
d'où $(x,y) = (0,0)$ (cas $\cos x = 1$) ou $(x,y) = \pm\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ (cas $\cos x = -\frac{1}{2}$).
- soit $x = -y$: dans ce cas $\cos x = 1$ donc $(x,y) = (0,0)$.

<u>*Synthèse*</u> : les trois points $(0,0)$ et $\pm\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ sont bien des points critiques et ce sont les seuls d'après l'analyse.

3) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. J'ai

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(x+y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

or

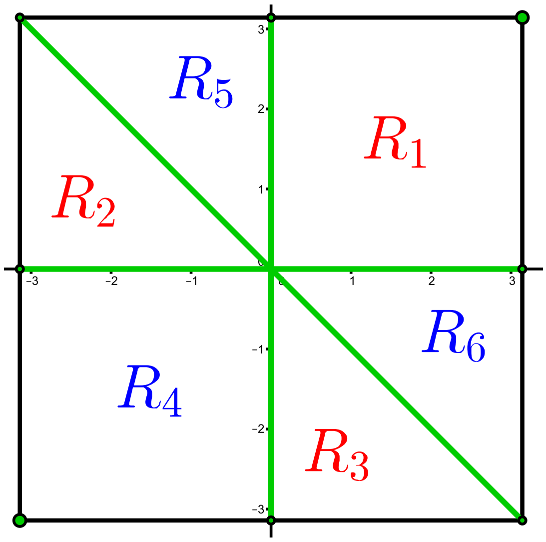
$$\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}$$

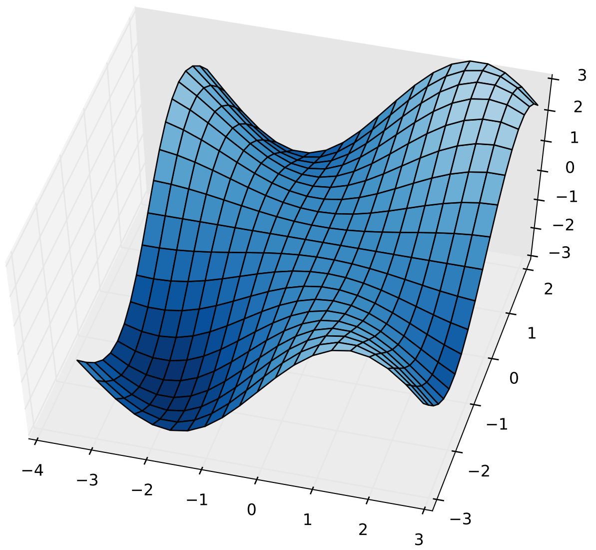
d'où

$$\boxed{f(x,y) = 4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).}$$

4) D'après le résultat précédent :

- $\mathcal{E}_0$ est l'union des segments $S_1 \begin{cases} x = 0 \\ y \in [-\pi,\pi] \end{cases}$, $S_2 \begin{cases} x \in [-\pi,\pi] \\ y = 0 \end{cases}$, $S_3 \begin{cases} x + y = 0 \\ x \in [-\pi,\pi] \end{cases}$ et des singletons $\{(\pi,\pi)\}$ et $\{(-\pi,-\pi)\}$, en vert sur le dessin ;
- ces segments découpent C en 8 régions sur lesquelles les trois facteurs apparus au **3)** sont de signe constant, il n'y a qu'à compter le nombre de facteurs négatifs pour déterminer le signe de f :
$$\mathcal{E}_1 = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \text{ (en rouge)} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{-1} = R_4 \cup R_5 \cup R_6 \text{ (en bleu)}$$





5) Déjà, f est continue sur C, partie fermée bornée non vide de $\mathbb{R}^2$, espace vectoriel normé de dimension finie, donc f est bornée sur C et atteint ses bornes. Si l'une de ces bornes est atteinte en un point de U (qui est l'intérieur de C), ce point est nécessairement l'un des points critiques trouvés au **2)** (un extremum global est *a fortiori* local).

$f(0,0)=0$ et f prend des valeurs strictement positives et strictement négatives (cf. **4)**), donc pas d'extremum global en ce point ! Par ailleurs $f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $f\left(-\frac{2\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Il reste à voir les valeurs de f sur la frontière $C\backslash U$ pour statuer. Or $f(\pm\pi,y)=2\sin y$ prend ses valeurs dans $[-2,2]$, de même pour $f(x,\pm\pi)=2\sin x$, tandis que $\frac{3\sqrt{3}}{2}>2$. En conclusion,

$$\boxed{\max_C f=f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\quad\text{et}\quad\min_C f=f\left(-\frac{2\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}.}$$

N.B. : comme $f(-x,-y)=-f(x,y)$, on aurait pu se contenter de chercher le maximum...
Remarquons que

$$\forall(i,j)\in\mathbb{Z}^2\quad f(x+2i\pi,y+2j\pi)=f(x,y).$$

Or tout point du plan se trouve dans (au moins) l'un des translatés de C suivant un vecteur de la forme $2i\pi\vec{i}+2j\pi\vec{j}$, pour un couple (i,j) convenable. Il en résulte que $f\left(\mathbb{R}^2\right)=f(C)$, donc les extrema globaux de f sur C sont aussi ses extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$ (atteints en une infinité de points, par translation... On a un *pavage* du plan par les translatés de C).

N.B. : en cas de besoin, $i=\left\lfloor\frac{x+\pi}{2\pi}\right\rfloor$ vérifie $x-2i\pi\in[-\pi,\pi[$, ce qui permet de trouver la bonne translation.

Exercice 2

1) L'application $\delta:(x,y)\mapsto(x+y,x-y)$ est une bijection de $\mathcal{P}$ dans $\Pi=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\ /\ u>0\right\}$, de classe $\mathcal{C}^1$ (théorèmes opératoires classiques) et de bijection réciproque $(u,v)\mapsto\frac{1}{2}(u+v,u-v)$, également $\mathcal{C}^1$.
À $f:\mathcal{P}\to\mathbb{R}$, j'associe $F=f\circ\delta^{-1}$; $f\in\mathcal{C}^1(\mathcal{P})$ si et seulement si $F\in\mathcal{C}^1(\Pi)$ et si elles sont $\mathcal{C}^1$, j'ai, par dérivation de fonctions composées,

$$\begin{array}{lrcl}\forall(x,y)\in\mathcal{P} & f(x,y) & = & F(x+y,x-y)\\ & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \frac{\partial F}{\partial u}(x+y,x-y)+\frac{\partial F}{\partial v}(x+y,x-y)\\ & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \frac{\partial F}{\partial u}(x+y,x-y)-\frac{\partial F}{\partial v}(x+y,x-y)\end{array}$$

Par conséquent, f est solution sur $\mathcal{P}$ de (E_0) si et seulement si F est solution sur Π de l'équation aux dérivées partielles $2\frac{\partial F}{\partial v}=0$, autrement dit si et seulement s'il existe une application k de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall(u,v)\in\Pi\quad F(u,v)=k(u).$$

En revenant aux variables x,y, j'obtiens :

$$\boxed{\text{Les solutions de }(E_0)\text{ sont les }f:(x,y)\mapsto k(x+y),\ k\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R}\right).}$$

2) **a)** Soient $A\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f:(x,y)\mapsto\Phi(x+y)A(x)$; j'ai

$$\begin{array}{lrl}\forall(x,y)\in\mathcal{P} & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & =\Phi'(x+y)A(x)+\Phi(x+y)A'(x)\\ & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & =\Phi'(x+y)A(x)\\ & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & =\Phi(x+y)A'(x)\end{array}$$

donc, pour que f soit solution de (E_g), il suffit que A soit une primitive de α, qui en admet puisqu'elle est continue :

$$\boxed{(x,y)\mapsto\Phi(x+y)A(x)\text{ est solution de }(E_g)\text{ dès que }A'=\alpha.}$$

b) De même, pour $g : (x,y) \mapsto \Phi(x+y)\,\beta(y)$, je cherche une solution de la forme $f : (x,y) \mapsto \Phi(x+y)\,B(y)$, qui convient si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \mathcal{P} \quad -\Phi(x+y)\,B'(y) = \Phi(x+y)\,\beta(y)\,.$$

En conclusion :

$$\boxed{(x,y) \mapsto \Phi(x+y)\,B(y) \text{ est solution de } (E_g) \text{ dès que } B' = -\beta.}$$

3) a) Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$; je réduis au même dénominateur :

$$a\frac{x+y}{1+y^2}+b\frac{y}{1+y^2}+c\frac{x+y}{1+x^2}+d\frac{x}{1+x^2} = \frac{ax^3+(a+b)\,x^2y+(c+d)\,xy^2+cy^3+(a+c+d)\,x+(a+b+c)\,y}{(1+x^2)\,(1+y^2)}$$

Pour faire apparaître $(x+y)^3$, je choisis $a=c=1$, $b=d=2$ et j'obtiens :

$$\frac{x+y}{1+y^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{x+y}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2} = \frac{(x+y)^3+4x+4y}{(1+x^2)\,(1+y^2)} = \frac{(x+y)^3+4\,(x+y)}{\sqrt{x+y}}\cdot g(x,y)$$

Par conséquent,

$$\boxed{\varphi : u \mapsto \frac{\sqrt{u}}{u^3+4u} \text{ et } a=c=1,\ b=d=2 \text{ conviennent.}}$$

b) Je choisis comme primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \arctan x$ et pour $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$, $x \mapsto \ln\left(1+x^2\right)$; alors, en superposant les solutions obtenues au **2)**, j'obtiens la solution particulière

$$(x,y) \mapsto (x+y)\,\varphi(x+y)\left[\arctan x - \arctan y\right] + \varphi(x+y)\left[\ln\left(1+x^2\right) - \ln\left(1+y^2\right)\right]$$

et donc

$$\boxed{\omega : (x,y) \mapsto \frac{\sqrt{x+y}}{(x+y)^2+4}\left[\arctan x - \arctan y\right] + \frac{\ln\left(1+x^2\right)-\ln\left(1+y^2\right)}{\sqrt{x+y}\left[(x+y)^2+4\right]} \text{ est solution de } (E_g).}$$

Alors f est solution de l'équation linéaire (E_g) si et seulement si $f-\omega$ est solution de l'équation homogène associée (E_0), donc, d'après **1)** :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_g) \text{ sont les } (x,y) \mapsto \omega(x,y) + F(x+y),\ F \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R}\right).}$$

c) Il est clair que la fonction ω définie ci-dessus convient ; supposons alors que f, solution de (E_g), vérifie $f(x,x) = 0$; d'après le résultat précédent, f est de la forme $(x,y) \mapsto \omega(x,y) + F(x+y)$, $F \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R}\right)$ et par hypothèse

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad f(x,x) = F(2x) = 0,$$

si bien que, nécessairement, $F = 0$. En conclusion :

$$\boxed{\omega \text{ est l'unique solution de } (E_g) \text{ telle que : } \forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \omega(x,x) = 0.}$$

d) Soient $h \in \mathbb{R}^{+*}$ et (x,y) dans $\mathcal{P}$ tel que $x+y=h$:

$$\omega(x,y) = \omega(x,h-x) = \frac{\sqrt{h}}{4+h^2}\left[\arctan x - \arctan(h-x) + \frac{1}{h}\ln\left(\frac{1+x^2}{1+(h-x)^2}\right)\right]$$

h étant fixé, soit $\psi : x \mapsto \arctan x - \arctan(h-x) + \dfrac{1}{h}\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+(h-x)^2}\right)$; ψ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi'(x) = \frac{4+h^2}{\left(1+(h-x)^2\right)\left(1+x^2\right)}\ ;$$

donc ψ est croissante, or elle admet pour limites $-\pi$ en $-\infty$ et π en $+\infty$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\psi(x)| \leq \pi.$$

D'où finalement :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathcal{P} \quad x+y=h \Rightarrow |\omega(x,y)| \leq \frac{\pi\sqrt{h}}{h^2+4}.}$$

ω est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{P}$; je montre que je peux la prolonger par continuité à $\overline{\mathcal{P}} = \{(x,y)\ /\ x+y \geq 0\}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \omega(x,-x) = 0$. Soit alors un couple $(x,-x)$ sur la frontière de $\mathcal{P}$ et (δ,η) tel que $(x+\delta, -x+\eta) \in \overline{\mathcal{P}}$ (c'est-à-dire que $\delta+\eta \geq 0$) ; alors, d'après la majoration précédente (encore vraie pour $h=0$ du fait que $\omega(x,-x) = 0$!) :

$$|\omega(x+\delta, -x+\eta)| \leq \frac{\pi\sqrt{\delta+\eta}}{(\delta+\eta)^2+4} \leq \frac{\pi}{4}\sqrt{\delta+\eta}.$$

En choisissant sur $\mathbb{R}^2$ la norme définie par $\|(\delta,\eta)\| = |\delta| + |\eta|$, j'ai

$$|\omega(x+\delta, -x+\eta)| \leq \frac{\pi}{4}\sqrt{\|(\delta,\eta)\|}$$

Il en résulte que $\lim\limits_{(\delta,\eta)\to(0,0)} \omega(x+\delta, -x+\eta) = 0$ et finalement

$\boxed{\omega \text{ se prolonge par continuité au demi-plan fermé } \{(x,y)\ /\ x+y \geq 0\} \text{ en posant : } \forall x \in \mathbb{R} \quad \omega(x,-x) = 0.}$

Problème : étude de l'équation d'onde

Partie I – Solution générale de (*E*)

1) a) Je note que l'application linéaire $\phi : (x,t) \mapsto (x-ct, x+ct)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ (son déterminant vaut $2c$). Or, si u_1 existe, $u_1 \circ \phi = u$ d'où nécessairement

$$u_1 = u \circ \phi^{-1} : (X,Y) \mapsto u\left(\frac{X+Y}{2}, \frac{Y-X}{2c}\right).$$

Réciproquement, cette fonction u_1 est bien définie sur $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme u ; enfin, par construction, elle vérifie bien la relation souhaitée :

$\boxed{\text{Il existe une unique fonction } u_1\ \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ telle que } \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad u_1(x-ct, x+ct) = u(x,t).}$

b) D'après la relation précédente, j'ai grâce au théorème de Schwarz (u_1 étant $\mathcal{C}^2$), les dérivées de u étant prises au point (x,t) et celles de u_1 au point $(x-ct, x+ct)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2} - 2c^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial X \partial Y} + c^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2}
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u_1}{\partial X \partial Y}.$$

Donc

$\boxed{u_1 \text{ est solution de } (E_1).}$

2) Il est clair que, si u_1 est de la forme $(X,Y) \mapsto \varphi(X) + \psi(Y)$ avec $\varphi, \psi\ \mathcal{C}^2$, alors u_1 est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie (E_1). Réciproquement, soit u_1 solution $\mathcal{C}^2$ de (E_1) ; $\dfrac{\partial}{\partial X}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial Y}\right) = 0$, d'où l'existence d'une fonction $\mathcal{C}^1$ A d'une variable telle que $\dfrac{\partial u_1}{\partial Y} : (X,Y) \mapsto A(Y)$, d'où enfin, en appelant ψ une primitive de A, l'existence d'une fonction φ d'une variable telle que

$$\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^2 \quad u_1(X,Y) = \varphi(X) + \psi(Y)\ ;$$

nécessairement, $\varphi : X \mapsto u_1(X,0) - \psi(0)$ et $\psi : Y \mapsto u_1(0,Y) - \varphi(0)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$; en conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} u_1 \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ si et seulement s'il existe } \varphi, \psi\ \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \\ \text{telles que : } \quad \forall (X,Y) \in \mathbb{R}^2 \quad u_1(X,Y) = \varphi(X) + \psi(Y). \end{array}}$$

Par conséquent, si u est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$, alors il existe $\varphi, \psi\ \mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad u(x,t) = \varphi(x-ct) + \psi(x+ct)\ ;$$

la réciproque est immédiate :

$$\boxed{\begin{array}{l} u \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ si et seulement s'il existe } \varphi, \psi\ \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \\ \text{telles que : } \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad u(x,t) = \varphi(x-ct) + \psi(x+ct). \end{array}}$$

Partie II – Solutions stationnaires

1) Soient v, w $\mathcal{C}^2$ vérifiant (S_λ) et $u : (x,t) \mapsto v(x) \cdot w(t)$; alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v''(x)\,w(t) = \lambda u(x,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v(x)\,w''(t) = \lambda c^2 u(x,t)\ ,$$

d'où

$$\boxed{u : (x,t) \mapsto v(x) \cdot w(t) \text{ est solution sur } \mathbb{R}^2 \text{ de } (E).}$$

2) Soit maintenant $u : (x,t) \mapsto v(x) \cdot w(t)$ solution non nulle de (E), avec v, w $\mathcal{C}^2$; (E) donne

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad v''(x)\,w(t) - \frac{1}{c^2} v(x)\,w''(t) = 0. \qquad (*)$$

u étant non nulle, je dispose de (x_0, t_0) tel que $v(x_0)\,w(t_0) \neq 0$ et j'ai

$$\frac{v''(x_0)}{v(x_0)} = \frac{1}{c^2} \frac{w''(t_0)}{w(t_0)}\ ;$$

j'appelle λ cette valeur commune ; en prenant $x = x_0$ dans $(*)$, j'obtiens

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad w''(t) = \lambda c^2 w(t)$$

et en prenant $t = t_0$ dans $(*)$, j'obtiens de même

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad v''(x) = \lambda v(x)\,.$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe } \lambda \text{ réel tel que } v, w \text{ soient solutions de } (S_\lambda).}$$

3) **a)** Comme ci-dessus, je dispose de (x_0, t_0) tel que $v(x_0)\,w(t_0) \neq 0$ et

$$u(0, t_0) = u(\ell, t_0) = 0 \quad \text{donne} \quad v(0) = v(\ell) = 0.$$

De même, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x_0, 0) = 0$ donne $w'(0) = 0.$

$$\boxed{v, w \text{ vérifient } v(0) = v(\ell) = 0 \text{ et } w'(0) = 0.}$$

b) Pour $\lambda = 0$, v doit être une fonction affine s'annulant en deux points, donc identiquement nulle, ce qui donnerait u identiquement nulle également : $\lambda = 0$ ne convient pas.

Pour $\lambda = \omega^2 > 0$, v doit être de la forme $x \mapsto \alpha \operatorname{sh} \omega x + \beta \operatorname{ch} \omega x$; $v(0) = 0$ impose $\beta = 0$ et $v(\ell) = \alpha \operatorname{sh} \omega\ell = 0$ impose $\alpha = 0$, donc $v = 0$: $\lambda > 0$ ne convient pas non plus.

Pour $\lambda = -\omega^2 < 0$, v doit être de la forme $x \mapsto \alpha \sin \omega x + \beta \cos \omega x$; $v(0) = 0$ impose $\beta = 0$ et $v(\ell) = \alpha \sin \omega\ell = 0$ nécessite que $\omega\ell$ soit de la forme $n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$ (car α ne peut pas être nul).

Finalement, λ est nécessairement de la forme $-\omega_n^2$, en posant $\omega_n = n\pi/\ell$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Enfin, si $\lambda = -\omega_n^2$, v est de la forme $x \mapsto \alpha \sin \omega_n x$ et w de la forme $t \mapsto a \sin \omega_n ct + b \cos \omega_n ct$, la condition $w'(0) = 0$ imposant $a = 0$; w est donc de la forme $t \mapsto b \cos \omega_n ct$.

Réciproquement, avec ces choix de λ, v, w, les fonctions v, w vérifient le système (S_λ) donc la fonction u associée est une solution stationnaire de (E). De plus, en posant $A = \alpha b$,

$$\boxed{\text{Les solutions associées à } \lambda = -(n\pi/\ell)^2 \text{ sont les } (x,t) \mapsto A \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right) \cos\left(n\pi \frac{t}{T}\right),\ A \in \mathbb{R}.}$$

Autre écriture : $A \sin(\omega_n x) \cos(\omega_n ct) = \dfrac{A}{2} \sin\big(\omega_n (x - ct)\big) + \dfrac{A}{2} \sin\big(\omega_n (x + ct)\big)$ où l'on retrouve la forme générale du **I**...

Partie III

1) <u>*Analyse*</u> : si U est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, solution du problème $\mathcal{P}(\psi)$, alors d'après le **I**, je dispose de deux fonctions F et G de classe $\mathcal{C}^2$ telles que U soit définie par $U : (x,t) \mapsto F(x-ct) + G(x+ct)$.

D'après $(J_1(\psi))$, F et G doivent vérifier :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) + G(x) = \psi(x) \quad \text{et} \quad -F'(x) + G'(x) = 0.$$

Donc $F - G = \lambda$ est constante sur $\mathbb{R}$ et il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{1}{2}[\psi(x) + \lambda] \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{1}{2}[\psi(x) - \lambda] \ ,$$

d'où finalement : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad U(x,t) = \dfrac{1}{2}[\psi(x-ct) + \psi(x+ct)]$.

<u>*Synthèse*</u> : l'application U définie ci-dessus est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, car ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$; U est bien solution du problème $\mathcal{P}(\psi)$: U est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$ d'après le **I** et vérifie clairement les conditions initiales $J_1(\psi)$; enfin U est unique d'après l'analyse :

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{P}(\psi) \text{ admet une unique solution de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2\text{, définie par :}\\ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad U(x,t) = \dfrac{1}{2}[\psi(x-ct) + \psi(x+ct)].\end{array}}$$

2) a) Quelles que soient les fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction $\tilde{\varphi}$ définie par :

$$\widetilde{\varphi}(x) = \left| \begin{array}{ll} \varphi(x) & \text{si } x \in [0,h] \\ x\varphi'(0) + \dfrac{x^2}{2}\varphi''(0) + x^3 f(x) & \text{si } x < 0 \\ (x-h)\varphi'(h) + \dfrac{(x-h)^2}{2}\varphi''(h) + (x-h)^3 g(x) & \text{si } x > h \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (avec $\widetilde{\varphi}'(0) = \varphi'(0)$, $\widetilde{\varphi}'(h) = \varphi'(h)$, $\widetilde{\varphi}''(0) = \varphi''(0)$, $\widetilde{\varphi}''(h) = \varphi''(h)$) et coïncide avec φ sur $[0,h]$ par construction :

$$\boxed{\text{Il existe une infinité de fonctions } \widetilde{\varphi} \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ coïncidant avec } \varphi \text{ sur } [0,h].}$$

b) D'après **2)** : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \widetilde{U}(x,t) = \dfrac{1}{2}\left[\widetilde{\varphi}(x-ct) + \widetilde{\varphi}(x+ct)\right]$. $\widetilde{U}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$, donc sa restriction l'est sur $[0,h] \times \mathbb{R}$, vérifie les conditions initiales $J_1(\widetilde{\varphi})$, donc en particulier les conditions $J_1(\varphi, h)$: finalement la restriction de $\widetilde{U}$ à $[0,h] \times \mathbb{R}$ est solution de $\mathcal{P}(h,\varphi)$ si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \tilde{U}(0,t) = \tilde{U}(h,t) = 0 \ ,$$

soit si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \widetilde{\varphi}(-ct) + \widetilde{\varphi}(ct) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \widetilde{\varphi}(h-ct) + \widetilde{\varphi}(h+ct) = 0 \ ,$$

ou encore, avec $u = ct$ et $v = ct - h$:

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \widetilde{\varphi}(-u) = -\widetilde{\varphi}(u) \quad \text{et} \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad \widetilde{\varphi}(v+2h) = -\widetilde{\varphi}(-v).$$

Il est clair que, si $\widetilde{\varphi}$ vérifie ces deux conditions, alors elle est impaire et $2h$-périodique, et réciproquement.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La restriction de } \widetilde{U} \text{ à } [0,h] \times \mathbb{R} \text{ est solution de } \mathcal{P}(h,\varphi)\\ \text{si et seulement si } \widetilde{\varphi} \text{ est impaire et } 2h\text{-périodique.}\end{array}}$$

c) Si elle existe, $\widehat{\varphi}$ est entièrement déterminée par :

$$\widehat{\varphi}(x) = \left| \begin{array}{lll} \varphi(x - 2ph) & \text{si } x \in [2ph, (2p+1)h] \ , & p \in \mathbb{Z} \\ -\varphi(-x + 2ph) & \text{si } x \in [(2p-1)h, 2ph] \ , & p \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Or on vérifie aisément que ces égalités définissent bien une application $\widehat{\varphi}$ (car $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$, donc pour $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(nh) = 0$ est défini sans ambiguïté) et que $\widehat{\varphi}$ est $2h$-périodique impaire et coïncide avec φ sur $[0,h]$:

$$\boxed{\text{Il existe une unique fonction } \widehat{\varphi} \ 2h\text{-périodique impaire coïncidant avec } \varphi \text{ sur } [0,h].}$$

d) D'après les expressions ci-dessus, $\widehat{\varphi}$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur les intervalles de la forme $]nh,(n+1)h[$ pour $n \in \mathbb{Z}$; comme elle est 2π-périodique, sa régularité est donnée par celle du raccordement en 0 et en π. Or :

$$\widehat{\varphi}(x) = \left| \begin{array}{cl} -\varphi(-x) & \text{sur } [-h,0] \\ \varphi(x) & \text{sur } [0,h] \\ -\varphi(2h-x) & \text{sur } [h,2h] \end{array} \right.$$

d'où :

$$\widehat{\varphi}\,'(x) = \left| \begin{array}{cl} \varphi'(-x) & \text{sur }]-h,0[\\ \varphi'(x) & \text{sur }]0,h[\\ \varphi'(2h-x) & \text{sur }]h,2h[\end{array} \right. \quad ; \quad \widehat{\varphi}\,''(x) = \left| \begin{array}{cl} -\varphi''(-x) & \text{sur }]-h,0[\\ \varphi''(x) & \text{sur }]0,h[\\ -\varphi''(2h-x) & \text{sur }]h,2h[\end{array} \right.$$

Il en résulte que le raccordement est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 et en h, avec $\widehat{\varphi}\,'(0) = \varphi'(0)$ et $\widehat{\varphi}\,'(h) = \varphi'(h)$. Par contre le raccordement n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ en général : il l'est si et seulement si φ'' s'annule en 0 et en h. En conclusion :

$$\boxed{\widehat{\varphi} \text{ est en général de classe } \mathcal{C}^1 \text{ ; } \widehat{\varphi} \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ si et seulement si } \varphi''(0) = \varphi''(h) = 0.}$$

e) Cette condition étant ici vérifiée, d'après les questions précédentes, la restriction à $[0,h] \times \mathbb{R}$ de la solution $(x,t) \mapsto \dfrac{1}{2}\big[\widehat{\varphi}(x-ct) + \widehat{\varphi}(x+ct)\big]$ du problème $\mathcal{P}(\widehat{\varphi})$ est solution du problème $\mathcal{P}(h,\varphi)$:

$$\boxed{U : (x,t) \mapsto \frac{1}{2}\big[\widehat{\varphi}(x-ct) + \widehat{\varphi}(x+ct)\big] \text{ est solution du problème } \mathcal{P}(h,\varphi).}$$

En outre, $\widehat{\varphi}$ étant $2h$-périodique, il est clair que :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0,h], \text{ la fonction } t \mapsto U(x,t) \text{ est } 2h/c \text{ -périodique.}}$$