D.M. 7

Exercice 1

Soit $f : (x,y) \mapsto \sin x + \sin y - \sin(x+y)$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et préciser ses dérivées partielles.

2) Déterminer les points critiques de f appartenant à l'ouvert $U =]-\pi,\pi[^2$.

3) Montrer que, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$: $f(x,y) = 4\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{x+y}{2}$.

4) On note C le carré $[-\pi,\pi]^2$. Représenter graphiquement les ensembles
$\mathcal{E}_0 = \{(x,y) \in C \ / \ f(x,y) = 0\}$, $\quad \mathcal{E}_1 = \{(x,y) \in C \ / \ f(x,y) > 0\}$, $\quad \mathcal{E}_{-1} = \{(x,y) \in C \ / \ f(x,y) < 0\}$.

5) Déterminer les extrema globaux de f sur C.
Sur $\mathbb{R}^2$, f admet-elle un maximum global ? Un minimum global ?

Exercice 2

Dans tout l'exercice, $\mathcal{P}$ désigne le demi-plan de $\mathbb{R}^2$ défini par $\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x+y > 0\}$.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^k(\mathcal{P})$ l'ensemble des applications de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$sur $\mathcal{P}$.
Enfin, pour $g \in \mathcal{C}^0(\mathcal{P})$, on note (E_g) l'équation aux dérivées partielles, d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{P})$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = g.$$

1) On prend pour cette question $g = 0$. Résoudre l'équation (E_0) à l'aide du changement de variables

$$u = x + y \quad ; \quad v = x - y\ .$$

2) **a)** Soient Φ une application de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et α une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On prend $g : (x,y) \mapsto \Phi(x+y) \cdot \alpha(x)$.
Montrer qu'il existe une application A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'application

$$(x,y) \mapsto \Phi(x+y) \cdot A(x)$$

soit une solution particulière de (E_g).

b) Quelle solution particulière obtient-on, de forme analogue, pour $g : (x,y) \mapsto \Phi(x+y) \cdot \beta(y)$?

3) On choisit, pour toute la fin de l'exercice, $g : (x,y) \mapsto \dfrac{\sqrt{x+y}}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

a) Déterminer une application φ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\forall (x,y) \in \mathcal{P} \quad g(x,y) = \varphi(x+y) \cdot \left[a \cdot \frac{x+y}{1+y^2} + b \cdot \frac{y}{1+y^2} + c \cdot \frac{x+y}{1+x^2} + d \cdot \frac{x}{1+x^2}\right].$$

b) En déduire une solution particulière de (E_g), puis l'ensemble des solutions de (E_g).

c) Montrer qu'il existe une unique solution ω de (E_g) qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \omega(x,x) = 0.$$

On vérifiera que ω est définie par

$$\forall (x,y) \in \mathcal{P} \quad \omega(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2+4} \cdot \left[\sqrt{x+y} \cdot (\arctan x - \arctan y) + \frac{1}{\sqrt{x+y}} \cdot \ln\left(\frac{1+x^2}{1+y^2}\right)\right].$$

d) Pour h donné dans $\mathbb{R}^{+*}$, établir :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{P} \quad x+y = h \Rightarrow |\omega(x,y)| \leq \frac{\pi\sqrt{h}}{h^2+4}.$$

En déduire que ω peut être prolongée par continuité au demi-plan fermé $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x+y \geq 0\}$.

Problème : étude de l'équation d'onde

Dans ce problème, c désigne un nombre réel strictement positif fixé.
Toutes les fonctions étudiées sont à valeurs réelles.
On étudie l'équation aux dérivées partielles suivante, dite *équation d'onde :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{E}$$

en la fonction inconnue u, des variables réelles x et t, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Partie I – Solution générale de E

1) Soit u une solution de l'équation (E).

a) Montrer qu'il existe une unique fonction u_1 des deux variables réelles X et Y, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, telle que l'on ait : $\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad u_1\,(x - ct, x + ct) = u\,(x,t)$.

b) Montrer que u_1 est solution sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial X \partial Y} = 0 \tag{E_1}$$

2) Montrer que, pour que u_1 soit solution de (E_1) sur $\mathbb{R}^2$, il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions d'une variable réelle φ et ψ, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, telles que l'on ait :

$$\forall\,(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \quad u_1\,(X,Y) = \varphi\,(X) + \psi\,(Y)\,.$$

En déduire l'expression générale des solutions de l'équation (E).

Partie II – Solutions stationnaires

Une solution u de (E) est dite *stationnaire* si et seulement s'il existe deux fonctions v et w, d'une variable réelle, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, telles que l'on ait : $\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad u\,(x,t) = v\,(x) \cdot w\,(t)$.

1) Soit λ un nombre réel. Montrer que, si v et w sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifient le système suivant

$$\begin{cases} v'' &= \lambda v \\ w'' &= \lambda c^2 w \end{cases} \tag{S_λ}$$

alors $u : (x,t) \mapsto v\,(x) \cdot w\,(t)$ est solution sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation (E).

2) Réciproquement, soit $u : (x,t) \mapsto v\,(x) \cdot w\,(t)$ une solution stationnaire non identiquement nulle de l'équation (E). Montrer qu'il existe une constante réelle λ telle que les fonctions v et w soient solutions du système (S_λ).

3) Soit ℓ un nombre réel strictement positif. On pose $T = \ell/c$.

Soit $u : (x,t) \mapsto v\,(x) \cdot w\,(t)$ une solution stationnaire non identiquement nulle de l'équation (E) qui vérifie les conditions aux limites et initiales suivantes :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} & u\,(0,t) = u\,(\ell,t) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} & \dfrac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = 0 \end{cases} \tag{L}$$

a) Montrer que v et w vérifient les conditions aux limites :

$$v\,(0) = v\,(\ell) = 0 \quad \text{et} \quad w'\,(0) = 0\,.$$

b) Montrer que le réel λ tel que v et w soient solutions du système (S_λ) ne peut prendre qu'une infinité de valeurs de la forme $-\omega_1^2, -\omega_2^2, \ldots, -\omega_n^2, \ldots$ où la suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante de nombres réels positifs que l'on précisera.

Préciser, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions stationnaires non identiquement nulles de l'équation (E) qui vérifient les conditions (L) et correspondent au cas où $\lambda = -\omega_n^2$.

Partie III

ψ étant une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on désigne par $\mathcal{P}(\psi)$ le problème consistant à chercher la solution U de (E), de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, satisfaisant aux conditions initiales :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} U(x,0) = \psi(x) \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases} \tag{$J_1(\psi)$}$$

Enfin, h étant un réel donné, strictement positif, et φ une fonction donnée, définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,h]$, avec $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$, on désigne par $\mathcal{P}(h,\varphi)$ le problème consistant à chercher une fonction U de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, solution de (E) sur $[0,h] \times \mathbb{R}$, satisfaisant aux conditions initiales :

$$\forall x \in [0,h] \quad \begin{cases} U(x,0) = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases} \tag{$J_1(h,\varphi)$}$$

et vérifiant en outre les conditions aux limites :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad U(0,t) = U(h,t) = 0 \tag{L}$$

1) Résolution du problème $\mathcal{P}(\psi)$

Établir l'existence et l'unicité de la fonction U de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, solution du problème $\mathcal{P}(\psi)$ et donner l'expression de $U(x,t)$, pour tout (x,t) de $\mathbb{R}^2$.

2) Résolution du problème $\mathcal{P}(h,\varphi)$

a) φ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,h]$, avec $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$, montrer qu'il existe une infinité de fonctions $\tilde{\varphi}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ pour tout x de $[0,h]$.

b) Soit $\tilde{\varphi}$ une telle fonction. On désigne par $\tilde{U}$ la solution du problème $\mathcal{P}(\tilde{\varphi})$.

Montrer que la restriction de $\tilde{U}$ à $[0,h] \times \mathbb{R}$ est solution du problème $\mathcal{P}(h,\varphi)$ si et seulement si $\tilde{\varphi}$ est une fonction $2h$-périodique impaire.

c) Montrer qu'il existe une fonction unique, notée $\widehat{\varphi}$, qui soit $2h$-périodique impaire et telle que $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x)$ pour tout x de $[0,h]$.

d) Quelle est la classe de $\widehat{\varphi}$ dans le cas général ? Quelle est la condition nécessaire et suffisante portant sur $\varphi''(0)$ et $\varphi''(h)$ pour que $\widehat{\varphi}$ soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

e) On suppose que φ vérifie cette condition supplémentaire.

Déterminer alors une solution $U : (x,t) \mapsto U(x,t)$ du problème $\mathcal{P}(h,\varphi)$.

Vérifier que, pour tout x de $[0,h]$, la fonction $t \mapsto U(x,t)$ est $2h/c$ -périodique.