Exercice

1) Il est judicieux de commencer par le calcul du polynôme caractéristique, qui fournira le rang (selon que 0 sera valeur propre ou pas, puisqu'il est clair que $\operatorname{rg} A \geq 2$ (les deux premiers vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants). Or, en commençant par $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$,

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 2 \\ 1-\lambda & -5-\lambda & 4 \\ 0 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ &= (1-\lambda)\left((\lambda+2)(\lambda-4)+8\right) \text{ en développant par rapport à } C_1.\end{aligned}$$

d'où finalement

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = -\det(A-\lambda I) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \text{ ; les valeurs propres de } A \text{ sont } 0,1,2 \text{ et } \operatorname{rg} A = 2.}$$

Et, en pivotant si besoin,

$$\boxed{E_0(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \text{ ; } E_1(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ ; } E_2(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.}$$

2) Le changement de fonction inconnue $X = PY$, où $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\1&0&2\end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$, transforme le système (1) en

$$Y' = DY \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}, \text{ soit } \begin{cases} u' = 0 \\ v' = v \\ w' = 2w \end{cases}, \text{ d'où } \begin{cases} u = \alpha \\ v = \beta e^t \\ w = \gamma e^{2t} \end{cases}, \ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

La condition initiale s'écrit $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, d'où la solution demandée ($X_0 = PY$) :

$$\boxed{X_0(t) = \begin{pmatrix}x_0(t)\\y_0(t)\\z_0(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-e^t+e^{2t}\\2-e^t+2e^{2t}\\1+2e^{2t}\end{pmatrix}.}$$

3) Au vu du résultat précédent, $2\left[x_0(t) - y_0(t)\right] + z_0(t) + 1 = 0$, donc

$$\boxed{\text{La courbe paramétrée par } t \mapsto X_0(t) \text{ est tracée sur le plan d'équation } 2x-2y+z+1=0.}$$

On peut prévoir ce résultat sans même diagonaliser A : en effet, A est de rang 2 et — plus précisément — $\operatorname{Im} A$ est le plan engendré, par exemple, par les deux premiers vecteurs colonnes de A. C'est le plan d'équation $2x-2y+z=0$. Il en résulte que, si $t \mapsto X(t)$ est solution de (1), alors $2x'-2y'+z'$ est la fonction nulle ; on retrouve bien $2x-2y+z = C^{ste}$.

Problème A

1) a) En admettant que le rayon de convergence est strictement positif, pour pouvoir identifier les coefficients, tous calculs faits, il vient :

$$a_0 = 0 \text{ ; } a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad (n-1)\,a_{n-1} + a_n = 0$$

d'où par une récurrence immédiate :

$$\boxed{a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = (-1)^{n-1}(n-1)!\ .}$$

b) Le rayon de convergence de la série entière associé à la suite précédente (la seule possible) est **nul** (car $|a_{n+1}/a_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$), par conséquent :

$$\boxed{\text{(1) n'admet aucune solution développable en série entière en 0.}}$$

c) Soit $x > 0$ fixé. La fonction $b : t \mapsto \dfrac{1}{t} e^{-1/t}$ est continue sur $]0, x]$, à valeurs positives, et admet pour limite 0 en 0^+ : $b(t)$ est donc un $O(1)$ en 0 et la fonction 1 est intégrable sur $]0, x]$! Donc :

$$\boxed{\text{L'intégrale } a(x) \text{ est bien définie, pour } x > 0.}$$

d) La solution générale de l'équation homogène $x^2 y' + y = 0$ est $y = \lambda e^{1/x}$ et la méthode de variation de la constante conduit à, pour λ fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned} x \mapsto \lambda(x) e^{1/x} \text{ solution de } (1) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \lambda'(x) = \frac{1}{x} e^{-1/x} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda - a \text{ constante sur } \mathbb{R}^{+*} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Les solutions de (1) sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ sont les } x \mapsto e^{1/x}\big(a(x) + C\big),\ C \in \mathbb{R}.}$$

2) a) Fixons $x > 0$; j'ai

$$f(x) = \int_0^x \frac{\exp\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right)}{t} \mathrm{d}t$$

J'effectue le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif défini par

$$u = \frac{x}{t} - 1 \text{ ; j'ai : } t = \frac{x}{1+u} \text{ ; } \mathrm{d}t = -\frac{x\mathrm{d}u}{(1+u)^2} \text{ ; } \frac{1}{x} - \frac{1}{t} = -\frac{u}{x}$$

d'où (u décroît de $+\infty$ à 0 lorsque t croît de 0 à x)

$$\int_0^x \frac{\exp\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right)}{t} \mathrm{d}t = \int_{+\infty}^0 \frac{\exp\left(-\frac{u}{x}\right)}{\frac{x}{1+u}} \left(-\frac{x\mathrm{d}u}{(1+u)^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u/x}}{1+u} \mathrm{d}u$$

En conclusion :

$$\boxed{f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u/x}}{1+u} \mathrm{d}u \text{ , pour tout } x > 0.}$$

b) Déjà, d'après **1)d)**, la fonction f est solution de (1) sur $\mathbb{R}^{+*}$; montrons qu'elle se prolonge par continuité en 0 : je pourrais utiliser la caractérisation séquentielle de la limite combinée au théorème de convergence dominée, mais le théorème d'encadrement est plus rapide !

$$\forall x > 0 \quad 0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-u/x} \mathrm{d}u = x.$$

Donc f a pour limite 0 en 0 : elle est bien prolongeable par continuité en 0.
Par ailleurs, $x \mapsto e^{1/x}$ ayant pour limite $+\infty$ en 0, les autres solutions trouvées au **1)d)**, distinctes de f, de la forme $x \mapsto f(x) + Ce^{1/x}$ avec C non nul, ont une limite infinie en 0. En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est l'unique solution de (1) sur }]0, +\infty[\text{ prolongeable par continuité en 0.}}$$

3) a) Soit $x > 0$ fixé ; la fonction $\varphi_n : t \mapsto \dfrac{t^n e^{-t/x}}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, de limite nulle en 0, donc intégrable sur $[0, 1]$, et :

$$t^2 \varphi_n(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\varphi_n(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$; comme $2 > 1$, j'en déduis par comparaison à une intégrale de Riemann que φ_n est intégrable sur $[1, +\infty[$:

$$\boxed{R_n(x) \text{ est bien défini, pour tout } n \geq 0 \text{ et tout } x > 0.}$$

b) Par linéarité de l'intégrale sur un intervalle quelconque, j'ai grâce aux résultats précédents :

$$\forall x > 0\ \forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) - R_n(x) = \int_0^{+\infty} \left[1 - (-t)^n\right] \frac{e^{-t/x}}{1+t} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k\right] e^{-t/x} \mathrm{d}t$$

d'après la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique ; montrons qu'il s'agit d'une somme finie d'intégrales de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$.

En effectuant le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $t = ux$ sur $[0, +\infty[$ j'obtiens :

$$\int_0^{+\infty} (-t)^k e^{-t/x} \mathrm{d}t = (-1)^k \int_0^{+\infty} (-ux)^k e^{-u} x \mathrm{d}u = (-1)^k x^{k+1} k!$$

d'où, toujours par linéarité :

$$f(x) - R_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{k+1} k! = f_n(x)$$

après réindexation. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0 \quad f(x) - R_n(x) = f_n(x).}$$

c) À nouveau avec le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $t = ux$ sur $[0, +\infty[$, j'obtiens :

$$R_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-u}}{1 + ux} \mathrm{d}x \quad \text{d'où} \quad |R_n(x)| \leq x^{n+1} n! \ ;$$

en particulier, $R_n(x)$ est — pour n fixé — un $O\left(x^{n+1}\right)$, donc un $o(x^n)$ lorsque x tend vers 0.
En combinant les deux résultats précédents, j'obtiens :

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} f_n(x) + o(x^n)$$

qui n'est autre qu'un développement limité à l'ordre n, puisque f_n est bien un polynôme. Finalement :

$$\boxed{f \text{ admet pour tout } n \text{ le développement limité à l'ordre } n \text{ en } 0 : f(x) = f_n(x) + o(x^n).}$$

d) f, étant solution de (1), est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifie (1), d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad f'(x) = \frac{x - f(x)}{x^2} \ ;$$

il en résulte par une récurrence immédiate f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

D'après **c)**,

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} x - x^2 + 2x^3 - 6x^4 + o\left(x^4\right) \ ;$$

f, prolongée par continuité par $f(0) = 0$ est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$; de plus, f vérifiant (1),

$$f'(x) = \frac{x - f(x)}{x^2} \underset{x \to 0}{=} 1 - 2x + 6x^2 + o\left(x^2\right)$$

donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et admet une dérivée seconde en 0, $f''(0) = -2$.
Enfin, en dérivant (1), j'obtiens

$$x^2 y'' + (2x + 1) y' = 1$$

d'où

$$f''(x) = \frac{1 - (1 + 2x) f'(x)}{x^2} = -2 + o(1)$$

ce qui prouve que f'' est continue en 0, d'où finalement :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0, +\infty[.}$$

4) (NDCQTLC : on pourrait commencer par le **d)**, mais ça ne semble pas être l'esprit du sujet...)

a) Soit $g_n : x \mapsto \dfrac{e^{-n/x}}{1 + n}$; j'ai, pour $A > 0$

$$\forall x \in]0, A] \quad |g_n(x)| \leq \frac{e^{-n/A}}{1 + n} \leq e^{-n/A}$$

et la série géométrique $\sum e^{-n/A}$ converge, donc la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $]0, A]$. Les g_n étant continues, j'en déduis que g est définie et continue sur $]0, A]$, ceci pour tout $A > 0$. D'où

$$\boxed{g \text{ est définie et continue sur }]0, +\infty[.}$$

b) J'ai $\lim\limits_{0^+} g_0 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{0^+} g_n = 0$; or la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur $]0, 1]$ d'après la question précédente. Je peux donc appliquer le théorème de la double limite :

$$\boxed{g \text{ admet pour limite 1 en 0.}}$$

c) Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$; la fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u/x}}{u+1}$ est décroissante, comme produit de fonctions positives décroissantes, donc

$$\forall u \in \left]n, n+1\right] \quad \frac{e^{-(n+1)/x}}{n+2} \leq \frac{e^{-u/x}}{u+1} \leq \frac{e^{-n/x}}{n+1}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{e^{-(n+1)/x}}{n+2} \leq \int_n^{n+1} \frac{e^{-u/x}}{u+1} \mathrm{d}u \leq \frac{e^{-n/x}}{n+1}$$

et en sommant, moyennant une réindexation pour le membre de gauche :

$$g(x) - 1 \leq f(x) \leq g(x)$$

d'où finalement :

$$\boxed{\forall x \in \left]0, +\infty\right[\quad 0 \leq g(x) - f(x) \leq 1.}$$

d) Soit $x > 0$ fixé :

$$g(x) = e^{1/x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(e^{-1/x}\right)^{n+1}}{n+1} = -e^{1/x} \ln\left(1 - e^{-1/x}\right) \ ;$$

en effet, je connais le développement en série entière :

$$\forall t \in \left]-1, 1\right[\quad \ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} \ .$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]0, +\infty\right[\quad g(x) = -e^{1/x} \ln\left(1 - e^{-1/x}\right).}$$

e) $1 - e^{-1/x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $0 \neq 1$, donc

$$\ln\left(1 - e^{-1/x}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

d'où

$$g(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln x \ .$$

Or j'ai vu au **c)** que $g - f$ était bornée, donc négligeable devant $\ln x$ au voisinage de $+\infty$; j'en déduis :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln x.}$$

Problème B

Première partie : algèbre et probabilités

1) a) Par définition de U_n, $P(U_{n+1}|U_n) = 0$ puisque U_n et U_{n+1} sont incompatibles (si les n-ième et $(n+1)$-ième lancers ont donné Π, alors les $n+1$ premiers lancers ont donné deux Π consécutifs !).

$P(U_{n+1}|V_n)$ n'est autre que la probabilité d'obtenir Π au $(n+1)$-ième lancer, soit p. De même, $P(V_{n+1}|V_n) = P(V_{n+1}|U_n) = q$. Enfin

$$\boxed{P(U_{n+1}|U_n) = 0 \ ; \ P(U_{n+1}|V_n) = p \quad \text{et} \quad P(V_{n+1}|U_n) = P(V_{n+1}|V_n) = q.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'événement W_n = "Les n premiers lancers ont donné deux Π consécutifs". Par construction (U_n, V_n, W_n) est un système complet d'événements et par définition :

$$P(S_n|W_n) = P(U_{n+1}|W_n) = P(V_{n+1}|W_n) = 0.$$

Enfin, toujours par définition, $P(S_n|U_n) = p$ et $P(S_n|V_n) = 0$. Donc la formule des probabilités totales donne grâce au **a)** :

$$\boxed{u_{n+1} = pv_n \ ; \ v_{n+1} = q(u_n + v_n) \ ; \ s_n = pu_n.}$$

c) Par définition $u_1 = p$ et $v_1 = q$; puis j'applique le **b)**, sachant que $p + q = 1$:

$$\boxed{u_1 = p,\ v_1 = q,\ s_1 = p^2, \ \ ; u_2 = pq,\ v_2 = qp + q^2 = q,\ s_2 = p^2 q.}$$

2) a) Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie (Σ). Alors en remplaçant n par $n+1$ la seconde relation donne $v_{n+2} = qu_{n+1} + qv_{n+1}$, d'où en remplaçant u_{n+1} selon la première relation :

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad v_{n+2} = qv_{n+1} + qpv_n.}$$

D'après **b)** j'ai alors

$$s_{n+2} = pu_{n+2} = p^2 v_{n+1} = p^2 qu_n + p^2 qv_n = pqs_n + pqu_{n+1}$$

soit :

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad s_{n+2} = qs_{n+1} + qps_n.}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc définie par $v_1 = q$, $v_2 = q$ et la relation de récurrence linéaire double ci-dessus. Je remarque (habilement) que ladite relation est encore vraie pour $n = 0$ si je pose $v_0 = 1$. L'équation caractéristique de cette relation est $x^2 - qx - qp = 0$, de discriminant $\Delta = q^2 + 4qp$.

b) On suppose ici $p = 2/3$, donc $q = 1/3$, $\Delta = 1$; les solutions de l'équation caractéristique sont $2/3$ et $-1/3$; v_n est donc de la forme

$$v_n = \lambda \left(\frac{2}{3}\right)^n + \mu \left(\frac{-1}{3}\right)^n$$

où λ et μ sont déterminés par les deux premières valeurs, d'où $\lambda + \mu = 1$ et $2\lambda - \mu = 3q = 1$; d'où $\lambda = 2/3$ et $\mu = 1/3$ soit finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}.}$$

Or d'après **1)b)** et le prolongement précédent ($v_0 = 1$) j'ai, pour tout $n \geq 1$, $u_n = pv_{n-1}$. En conclusion, puisque $s_n = pu_n$, toujours d'après **1)b)**

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right] \quad \text{et} \quad s_n = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right].}$$

c) On revient au cas général. Δ est strictement positif, l'équation caractéristique admet donc deux solutions distinctes, les valeurs r_1 et r_2 de l'énoncé. Ainsi s_n est de la forme

$$s_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

où λ et μ sont déterminés par les deux premières valeurs. Or si je pose (habilement toujours) $s_0 = 0$, la relation de récurrence est vérifiée à partir du rang 0, puisque $s_2 = qs_1$.
D'où $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda r_1 + \mu r_2 = p^2$; comme $r_1 - r_2 = \sqrt{\Delta}$ j'en déduis

$$\lambda = -\mu = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}$$

soit finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left(r_1^n - r_2^n\right).}$$

3) Soit φ la fonction polynomiale de degré 2 $x \mapsto x^2 - qx - qp = (x - r_1)(x - r_2)$. Elle vérifie

$$\varphi(-1) = 1 + q - qp = 1 + q^2 > 0 \quad \text{et} \quad \varphi(1) = 1 - q - qp = p^2 > 0$$

et atteint son minimum en $q/2 \in]0,1[$, donc les deux racines r_1 et r_2 sont dans $]-1,1[$. Cela permet de calculer la somme des séries géométriques que voici :

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{r_1}{1-r_1} - \frac{r_2}{1-r_2}\right) = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{r_1 - r_2}{\varphi(1)}\right)$$

en réduisant au même dénominateur. Soit finalement, grâce aux remarques précédentes,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} s_n = 1.}$$

Ce résultat semble cohérent : il est presque certain d'obtenir deux Π consécutifs !

Deuxième partie : combinatoire et probabilités

1) a) Il s'agit du calcul de la loi binomiale. Réponse : $\binom{n}{j} \cdot \dfrac{1}{2^j} \cdot \dfrac{1}{2^{n-j}} = \boxed{\dbinom{n}{j} \cdot \dfrac{1}{2^n}.}$

b) Même valeur pour l'autre pièce, d'où par indépendance : $\boxed{p_n(j) = \dbinom{n}{j}^2 \cdot \dfrac{1}{2^{2n}}.}$

c) Par construction, pour $j \in [\![0, n]\!]$, les événements $B_{n,j}$: "À l'issue du n-ième lancer, les deux pièces ont donné chacune j fois Π" forment une partition de A_n, d'où par additivité

$$\boxed{P(A_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 \cdot \frac{1}{2^{2n}}.\ \text{La calculatrice donne : } P(A_6) = \frac{231}{1024} \approx 0,22559.}$$

2) a) Le choix d'un élément de P_j consiste à choisir j boules blanches parmi les n disponibles et $n - j$ boules noires parmi les n disponibles. D'où :

$$\boxed{\#P_j = \binom{n}{j}\binom{n}{n-j}.}$$

b) Par construction de nouveau, les P_j pour $j \in [\![0, n]\!]$ forment une partition de l'ensemble des parties à n éléments de notre ensemble à $2n$ éléments. D'où le résultat :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \binom{2n}{n}.}$$

N.B. : il s'agit d'un cas particulier de l'égalité de Vandermonde, utilisée dans l'étude de la loi hypergéométrique.

Il reste à conclure grâce à la symétrie des coefficients du binôme : $\dbinom{n}{n-j} = \dbinom{n}{j}$ d'où

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}.}$$

On retrouve bien, pour $n = 6$, $\binom{12}{6} = \dfrac{12.11.10.9.8.7}{6.5.4.3.2} = 924 = 2^2 \cdot 231\ldots$