D.M. 6

Exercice

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le rang de A. Calculer son polynôme caractéristique et ses valeurs propres.
Donner une base de chaque sous-espace propre *(on choisira des vecteurs dont la première composante est égale à* 1*)*.

2) On considère le système différentiel (S) : $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX$, où X est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$.
Déterminer la solution X_0 de (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3) Montrer que la courbe paramétrée définie par $t \mapsto X_0(t)$ est plane et préciser une équation de son plan.
Pouvait-on, sans intégrer le système (S), prévoir que les courbes paramétrées associées à ses solutions seraient situées dans des plans parallèles ?

Problème A

1) *Étude de l'équation différentielle :* $x^2y' + y = x \qquad (1)$

a) Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière solution de (1). Déterminer a_n en fonction de n.

b) Déterminer les solutions de (1) développables en série entière sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$.

c) Étudier la convergence de l'intégrale $a(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t} e^{-1/t} \mathrm{d}t$, pour $x > 0$.

d) Exprimer toutes les solutions de (1) sur $]0, +\infty[$ à l'aide de $a(x)$.

2) Dans cette question et dans toute la suite du problème on pose
$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) = e^{1/x} a(x).$$

a) Démontrer que :
$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u/x}}{1+u} \mathrm{d}u.$$

b) Montrer que l'unique solution de (1) sur $]0, +\infty[$ prolongeable par continuité en 0 est la fonction f.

3) *Étude de la fonction* f *au voisinage de* 0

Dans toute la suite, on pose :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]0, +\infty[\quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (k-1)!\, x^k \quad \text{et} \quad R_n(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t/x}}{1+t} \mathrm{d}t.$$

a) Justifier pour tout entier $n \geq 0$ la convergence de l'intégrale $R_n(x)$.

b) On admet que, pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^k e^{-u} \mathrm{d}u = k!$.
En exprimant $f(x) - R_n(x)$ comme une somme, prouver pour tout réel $x > 0$ la relation
$$f(x) - R_n(x) = f_n(x).$$
(f est la fonction définie à la question **2)***.)*

c) Démontrer que la fonction f admet un développement limité à tout ordre en 0 et préciser ce développement.

d) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$.

4) *Étude de la fonction f au voisinage de $+\infty$*

On définit dans cette question la fonction :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n/x}}{1+n}\ .$$

a) Démontrer que g est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

b) Déterminer la limite de $g(x)$ en 0.

c) Démontrer que : $\forall x \in \,]0,+\infty[\quad 0 \leq g(x) - f(x) \leq 1$.

d) Calculer la somme de la série $g(x)$ en fonction de x et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

e) En déduire que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$.

Problème B

Les deux parties du problèmes sont mutuellement indépendantes.

Introduction et notations

Le jeu de pile ou face, joué avec des pièces équilibrées ou biaisées, permet la modélisation la plus simple et la plus intuitive des expériences de Bernoulli.

Par convention la lettre Π (pour Pile) sera associée au succès de l'expérience, avec une probabilité de p, $p \in \,]0,1[$, et la lettre Φ (pour Face) sera associée à l'échec de cette expérience, avec une probabilité de $q = 1-p$.

Première partie : algèbre et probabilités

On lance une pièce (non nécessairement équilibrée), autant de fois qu'il est nécessaire jusqu'à obtenir deux succès consécutifs. Les résultats des lancers sont mutuellement indépendants.
On notera, pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n, U_n et V_n les événements suivants :

- $S_n =$ "On obtient pour la première fois deux Π consécutifs aux n-ième et $(n+1)$-ième lancers".
  Par exemple la suite de lancers $(\Pi,\Phi,\Phi,\Phi,\Pi,\Phi,\Pi,\Pi)$ réalise S_7.
- $U_n =$ "Les n premiers lancers ne donnent pas deux Π consécutifs, et le n-ième donne Π".
  La suite précédente réalise U_1, U_5, U_7 (mais pas U_8, Π étant réalisé aux places consécutives 7 et 8).
- $V_n =$ "Les n premiers lancers ne donnent pas deux Π consécutifs, et le n-ième donne Φ".
  La suite précédente réalise V_2, V_3, V_4 et V_6.

On note respectivement $s_n = P(S_n)$, $u_n = P(U_n)$ et $v_n = P(V_n)$ les probabilités de réaliser les événements S_n, U_n et V_n.

1) **a)** Déterminer, pour $n \geq 1$, les probabilités conditionnelles :

$$P(U_{n+1} \mid U_n)\,,\ P(U_{n+1} \mid V_n)\,,\ P(V_{n+1} \mid U_n) \quad \text{et} \quad P(V_{n+1} \mid V_n)$$

b) En déduire que, pour $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} = pv_n$, $s_n = pu_n$ et $v_{n+1} = q(u_n + v_n)$.

c) Calculer, pour $i \in \{1,2\}$, les valeurs de s_i, u_i et v_i.

2) On se propose de résoudre le système :

$$(\Sigma) \quad \forall n \geq 1 \quad \begin{cases} u_{n+1} = pv_n \\ v_{n+1} = q(u_n+v_n) \end{cases}\ .$$

a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $v_{n+2} = qv_{n+1} + qpv_n$.
En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a $s_{n+2} = qs_{n+1} + qps_n$.

b) Dans cette question seulement, on suppose que $p = \dfrac{2}{3}$.
Déterminer v_n pour $n \geq 1$; en déduire u_n et montrer que $s_n = \dfrac{4}{9}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\right]$.

c) On pose $\Delta = q^2 + 4qp$, $r_1 = \dfrac{q+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{q-\sqrt{\Delta}}{2}$. Montrer que $s_n = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left(r_1^n - r_2^n\right)$.

3) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n$. Commenter.

Deuxième partie : combinatoire et probabilités

On dispose de deux pièces équilibrées, $\left(p = q = \dfrac{1}{2}\right)$ et on réalise l'expérience suivante : pour n entier, $n \geq 1$, on répète n lancers simultanés des deux pièces distinctes numérotées 1 et 2.
Les lancers sont mutuellement indépendants.
On note les résultats sous forme d'un tableau :

$$\begin{pmatrix} \text{n}^{\text{o}} \text{ du lancer} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n \\ \text{Pièce 1} & \Pi & \Pi & \Phi & \Pi & \Phi & \Phi & \dots & \dots \\ \text{Pièce 2} & \Phi & \Pi & \Phi & \Phi & \Pi & \Pi & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on considère l'événement :

$A_k =$ "À l'issue du k-ième lancer les deux pièces ont donné le même nombre de Π."
Dans l'exemple ci-dessus, seul A_6 est réalisé.

Dans la suite du problème, on pose $P(A_0) = 1$, et on s'intéresse particulièrement à l'événement A_n.

1) a) Soit $j \in \{0, \dots n\}$. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue des n lancers la première pièce ait donné j fois Π.

b) Soit $j \in \{0, \dots n\}$, on désigne par $p_j(n)$ la probabilité pour qu'à l'issue des n lancers les deux pièces aient donné chacune j fois Π. Calculer $p_j(n)$.

c) En déduire que $P(A_n) = \dfrac{1}{2^{2n}} \sum\limits_{j=0}^{n} \dbinom{n}{j}^2$. Calculer $P(A_6)$ à 10^{-5} près.

2) Calcul de $\sum\limits_{j=0}^{n} \dbinom{n}{j}^2$.

a) On considère un ensemble E formé de $2n$ boules dont n sont noires et n sont blanches. On note P_j l'ensemble des parties de E à n éléments contenant j boules blanches ; déterminer le nombre d'éléments de P_j.

b) Déduire de ce qui précède $\sum\limits_{j=0}^{n} \dbinom{n}{j}\dbinom{n}{n-j} = \dbinom{2n}{n}$, puis la valeur de $\sum\limits_{j=0}^{n} \dbinom{n}{j}^2$.

— *On ne peut pas faire un cheval de course d'un porc.*
— *Non, répondit Samuel, mais on peut en faire un porc de course.*

John Steinbeck *(À l'est d'Eden).*