Problème A : matrices à coefficients positifs

Partie I

1) a) f admet une matrice symétrique dans la base canonique, qui est orthonormale, donc f est symétrique. D'après le théorème spectral,

$$\boxed{\text{Il existe une base orthonormale de } \mathbb{R}^3 \text{ où la matrice de } f \text{ est diagonale.}}$$

De plus, après calcul, il apparaît que le polynôme caractéristique de M est $-(X+4)\,X\,(X-10)$, les valeurs propres de f sont donc $-4, 0, 10$ et la matrice diagonale obtenue sera $\operatorname{diag}(-4, 0, 10)$ (à l'ordre des valeurs près, selon l'ordre choisi pour les vecteurs propres !).

b) Par hypothèse, $f(X) = \sum_{i=1}^{3} x'_i \lambda_i . e_i$, d'où, $\mathcal{B}'$ étant orthonormale :

$$\boxed{\big(f(X)\,|X\big) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i'^2.}$$

Comme les $x_i'^2$ sont positifs et $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$, il en résulte :

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{3} x_i'^2 \le \big(f(X)\,|X\big) \le \lambda_3 \sum_{i=1}^{3} x_i'^2.$$

Donc, si en outre X est unitaire :

$$\boxed{\lambda_1 \le \big(f(X)\,|X\big) \le \lambda_3.}$$

2) a) Après avoir examiné la situation au brouillon, je pose (habilement) $t_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \le j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$.

La matrice T ainsi construite est bien triangulaire supérieure, ses coefficients sont des "1" ou des "0" et ${}^tTT = (m_{i,j})$ où, par définition de ${}^tT$ et du produit matriciel :

$$\forall (i,j) \in \{1..n\}^2 \quad m_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} t_{k,i} t_{k,j} = \min(i,j)\,.$$

En effet, pour $k > \min(i,j)$, $t_{k,i}$ ou $t_{k,j}$ est nul, tandis que, pour $k \le \min(i,j)$, $t_{k,i} = t_{k,j} = 1$.

$$\boxed{M = {}^tTT.}$$

b) T étant triangulaire, avec des 1 partout sur sa diagonale, $\det T = 1$, d'où

$$\boxed{\det M = 1.}$$

c) Soit $X \in \mathbb{R}^n$; $\big(f(X)\,|X\big) = {}^t(MX)\,X = {}^tX^tMX = {}^t(TX)\,TX = \|TX\|^2$; il en résulte :

$$\boxed{\big(f(X)\,|X\big) \ge 0.}$$

d) Soit λ valeur propre de f et X un vecteur propre associé : $\big(f(X)\,|X\big) = \lambda \|X\|^2 \ge 0$ d'après le résultat précédent, or X non nul par hypothèse, d'où $\lambda \ge 0$. Mais, d'après **b)**, M est inversible et n'admet donc pas 0 pour valeur propre :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } f \text{ (et donc de } M) \text{ sont des réels strictement positifs.}}$$

Partie II

1) a) Comme f est symétrique, sa matrice dans toute base orthonormale est symétrique et (théorème spectral) f est diagonalisable, en particulier son polynôme caractéristique (qui n'est autre que celui de M) est scindé sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{M \text{ est une matrice symétrique et que son polynôme caractéristique a toutes ses racines réelles.}}$$

b) Soit $(e'_1, \ldots, e'_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de f, telle que e'_i soit associé à la valeur propre λ_i (l'existence d'une telle base est fournie par le théorème spectral).

Soit $X = \sum_{i=1}^{n} x_i.e'_i$, de norme 1. Comme au **I-1)b)**, j'obtiens

$$\big(f(X)\,|X\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i'^2 = 1$$

* $x_i'^2$ étant positif, j'ai pour tout i : $\lambda_1 x_i'^2 \le \lambda_i x_i'^2 \le \lambda_n x_i'^2$, d'où en sommant :

$$\boxed{\lambda_1 \le \big(f(X)\,|X\big) \le \lambda_n.}$$

* Si $f(X) = \lambda_1.X$, alors $\big(f(X)\,|X\big) = \lambda_1 \|X\|^2 = \lambda_1$ puisque X est unitaire.

  Réciproquement, je suppose $\big(f(X)\,|X\big) = \lambda_1$; alors, en reportant dans l'expression précédente,

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)\, x_i'^2 = 0 \quad \text{où} \quad \forall i \in \{1..n\} \quad \lambda_i - \lambda_1 \ge 0.$$

  Il s'agit d'une somme de termes positifs ou nuls : c'est qu'ils sont tous nuls et donc $x_i = 0$ pour tous les i tels que $\lambda_i > \lambda_1$. X est donc combinaison linéaire de vecteurs propres de f associés à la même valeur propre λ_1 (il peut y avoir plusieurs valeurs de i telles que $\lambda_i = \lambda_1 \ldots$). J'ai bien établi que $X \in E_{\lambda_1}(f)$ et finalement :

$$\boxed{\big(f(X)\,|X\big) = \lambda_1 \Leftrightarrow f(X) = \lambda_1.X.}$$

* Raisonnement identique au précédent :

$$\boxed{\big(f(X)\,|X\big) = \lambda_n \Leftrightarrow f(X) = \lambda_n.X.}$$

2) a) Par définition de U et de M,

$$f(U) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} u_j\right).e_i \quad \text{car} \quad \forall j \in \{1..n\} \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}.e_i\ .$$

(i) D'après ce qui précède, la base canonique étant orthonormale,

$$\big(f(U)\,|U\big) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} u_j\right).u_i\ ,$$

soit :

$$\boxed{\big(f(U)\,|U\big) = \sum_{1 \le i,j \le n} m_{i,j} u_i u_j.}$$

De même,

$$\big(f(U')\,|U'\big) = \sum_{1 \le i,j \le n} m_{i,j}\,|u_i| \cdot |u_j|$$

Comme les $m_{i,j}$ sont positifs et comme $u_i u_j \le |u_i| \cdot |u_j|$ pour tout couple (i,j), il en résulte :

$$\boxed{\big(f(U)\,|U\big) \le \big(f(U')\,|U'\big).}$$

Or, par hypothèse, $f(U) = \lambda_n.U$ et U est unitaire, donc $\big(f(U)\,|U\big) = \lambda_n$; d'après le résultat ci-dessus et celui du **1)b)**, j'ai nécessairement $\big(f(U')\,|U'\big) = \lambda_n$, d'où, grâce au **1)b)** toujours :

$$\boxed{f(U') = \lambda_n.U'.}$$

(ii) Je viens de voir que $\big(f(U)\,|U\big) = \big(f(U')\,|U'\big) = \lambda_n$, j'en déduis, d'après les expressions précédentes :

$$\sum_{1 \le i,j \le n} m_{i,j}\,(|u_i u_j| - u_i u_j) = 0.$$

C'est une somme de termes positifs ou nuls, donc tous nuls, or les $m_{i,j}$ sont strictement positifs, donc : $\forall (i,j) \quad u_i u_j = |u_i u_j| \ge 0$.

Par conséquent u_i et u_j sont de même signe, cela pour tout (i,j) :

$$\boxed{\text{Les composantes de } U \text{ sont toutes de même signe.}}$$

Je suppose un instant que E_{λ_n} soit de dimension supérieure ou égale à 2 ; je peux alors fixer deux vecteurs unitaires orthogonaux U, V de E_{λ_n}. D'après ce qui précède, U a ses composantes u_i qui sont toutes de même signe ; de même pour les composantes v_i de V. Quitte à remplacer U et/ou V par son opposé, je peux supposer que leurs coordonnées sont toutes positives ou nulles. U et V étant non nuls (vecteurs propres !), je dispose de p tel que $u_p > 0$ et de q tel que $v_q > 0$. Or l'orthogonalité de U et V s'écrit $\sum_{i=1}^{n} u_i v_i = 0$ et, comme tous les termes de cette somme sont positifs, c'est qu'ils sont tous nuls. Donc $v_p = 0$ et $u_q = 0$. Mézalor $U - V$ est un vecteur de E_{λ_n} avec deux coordonnées de signes contraires : $u_p > 0$ et $-v_q < 0$, ce qui contredit le résultat précédent (en normalisant $U - V$, ce qui ne change rien au signe de ses composantes...).

En conclusion,

$$\boxed{\text{La dimension du sous-espace propre associé à } \lambda_n \text{ est égale à 1.}}$$

b) (i) J'ai, comme ci-dessus :

$$\left(f(Y)\,|Y\right) = \lambda_k = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j} y_i y_j \quad \text{d'où} \quad \left|\left(f(Y)\,|Y\right)\right| = |\lambda_k| \leq \left(f\left(Y'\right)|Y'\right)$$

Or, d'après **1)b)**, $\left(f(Y')\,|Y'\right) \leq \lambda_n$. Ainsi :

$$\boxed{\left|\left(f(Y)\,|Y\right)\right| \leq \left(f(Y')\,|Y'\right) \quad \text{et} \quad |\lambda_k| \leq \lambda_n.}$$

(ii) D'une part, $\left(f(U')\,|Y\right)$ est nul, car les sous-espaces propres de f sont orthogonaux deux à deux et $f(U') \in E_{\lambda_n}$ tandis que $Y \in E_{\lambda_k}$. D'autre part, ce produit scalaire s'exprime à l'aide des composantes :

$$\boxed{\left(f(U')\,|Y\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}\,|u_i|\, y_j = 0.}$$

Si les y_j étaient tous positifs ou nuls, tous les termes de cette dernière somme seraient positifs ou nuls et au moins l'un d'entre eux serait strictement positif (choisir i tel que $u_i \neq 0$ et j tel que $y_j \neq 0$, ce qui est possible car U et Y sont unitaires, donc non nuls), d'où une contradiction. De même, les y_j ne peuvent pas tous être négatifs ou nuls :

$$\boxed{\text{Les composantes } y_1, y_2, \ldots, y_n \text{ de } Y \text{ ne sont pas toutes de même signe.}}$$

Autrement dit : $\exists\,(p,q) \quad y_p > 0 \quad \text{et} \quad y_q < 0$.

Je suppose un instant que $\left|\left(f(Y)\,|Y\right)\right| = \left(f(Y')\,|Y'\right)$. Soit $\varepsilon = \operatorname{sgn}\lambda_k$, de sorte que

$$\left|\left(f(Y)\,|Y\right)\right| = \left(f\left(Y'\right)|Y'\right) = \varepsilon\left(f(Y)\,|Y\right)$$

d'où

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}\left(|y_i y_j| - \varepsilon y_i y_j\right) = 0$$

et — là encore ! — tous les termes sont positifs, donc : $\forall\,(i,j) \quad |y_i y_j| = \varepsilon y_i y_j$.

Nécessairement, $\varepsilon = +1$ (choisir (i,j) tel que $i = j$ et $y_i \neq 0$) et cela amène une contradiction avec ce qui précède (choisir $(i,j) = (p,q)$ comme ci-dessus).

Par conséquent, $\left|\left(f(Y)\,|Y\right)\right| \neq \left(f(Y')\,|Y'\right)$. Or je sais déjà que

$$\left|\left(f(Y)\,|Y\right)\right| \leq \left(f\left(Y'\right)|Y'\right) \;,\; \left|\left(f(Y)\,|Y\right)\right| = |\lambda_k| \quad \text{et} \quad \left(f\left(Y'\right)|Y'\right) \leq \lambda_n$$

d'où finalement :

$$\boxed{\left|\left(f(Y)\,|Y\right)\right| < \left(f(Y')\,|Y'\right) \quad \text{et} \quad |\lambda_k| < \lambda_n.}$$

Problème B : étude de l'astroïde

1) Étude classique. (C) est symétrique par rapport à Ox (changer t en $\pi - t$), par rapport à Oy (changer t en $-t$) et par rapport aux bissectrices du repère (changer t en $\frac{\pi}{2} - t$ ou en $\frac{3\pi}{2} - t$). Pour t multiple de $\frac{\pi}{2}$, le point correspondant est un point de rebroussement de première espèce.

2) a) $x'(t) = -24a\cos^2 t \sin t$ et $y'(t) = 24a\sin^2 t \cos t$. Donc le vecteur de coordonnées $(-\cos t, \sin t)$ dirige la tangente à (C) en $M(t)$, y compris lorsque t est multiple de $\frac{\pi}{2}$ où l'on obtient bien un vecteur directeur de la tangente de rebroussement. $D(t)$ admet donc pour équation

$$(x - 8a\cos^3 t)\sin t + (y - 8a\sin^3 t)\cos t = 0,$$

soit

$$\boxed{D(t) \ / \ x\sin t + y\cos t = 8a\sin t\cos t.}$$

b) Compte tenu de l'équation précédente et comme en un point régulier $\sin t \cos t$ est non nul, $A(t)$ et $B(t)$ ont pour coordonnées $A(t)\,(8a\cos t, 0)$ et $B(t)\,(0, 8a\sin t)$; il en résulte que

$$\boxed{A(t)B(t) = 8a \text{ est constant.}}$$

3) a) $D(t)$ passe par $P_0(4a\cos t_0, 4a\sin t_0)$ si et seulement si :

$$\cos t_0 \sin t + \sin t_0 \cos t = 2\sin t\cos t,$$

soit :

$$\sin(t + t_0) = \sin 2t.$$

Compte tenu des symétries, je peux supposer $t_0 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; je cherche alors les t de $]-\pi, \pi]$ tels que $t + t_0 \equiv 2t\ [2\pi]$ ou $t + t_0 \equiv \pi - 2t\ [2\pi]$, c'est-à-dire

$$t = t_0 \text{ ou } t \equiv \frac{\pi - t_0}{3} \left[\frac{2\pi}{3}\right].$$

Cela fournit en général quatre valeurs de t, dont t_0 et trois valeurs différant deux à deux de $2\pi/3$.

Or $D(t)$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}_{\pi-t}$, donc, pour les valeurs de t différant de $2\pi/3$, les tangentes correspondantes font entre elles des angles de $\pi/3$; enfin la quatrième tangente est $D(t_0)$.

Les cas particuliers correspondent aux cas où t_0 est égal modulo π à l'une de ces trois valeurs, soit lorsque $t_0 \equiv \frac{\pi - t_0}{3} \left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou lorsque $t_0 + \pi \equiv \frac{\pi - t_0}{3} \left[\frac{2\pi}{3}\right]$, c'est-à-dire lorsque $t_0 \equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2}\right]$ ou lorsque $t_0 \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$: il s'agit des points de rebroussement et des points de contact avec le cercle de centre O de rayon $4a$.

b) Je viens de voir que $D(t_0)$ passe par P_0 et est dirigée par $\vec{u}_{\pi-t_0}$:

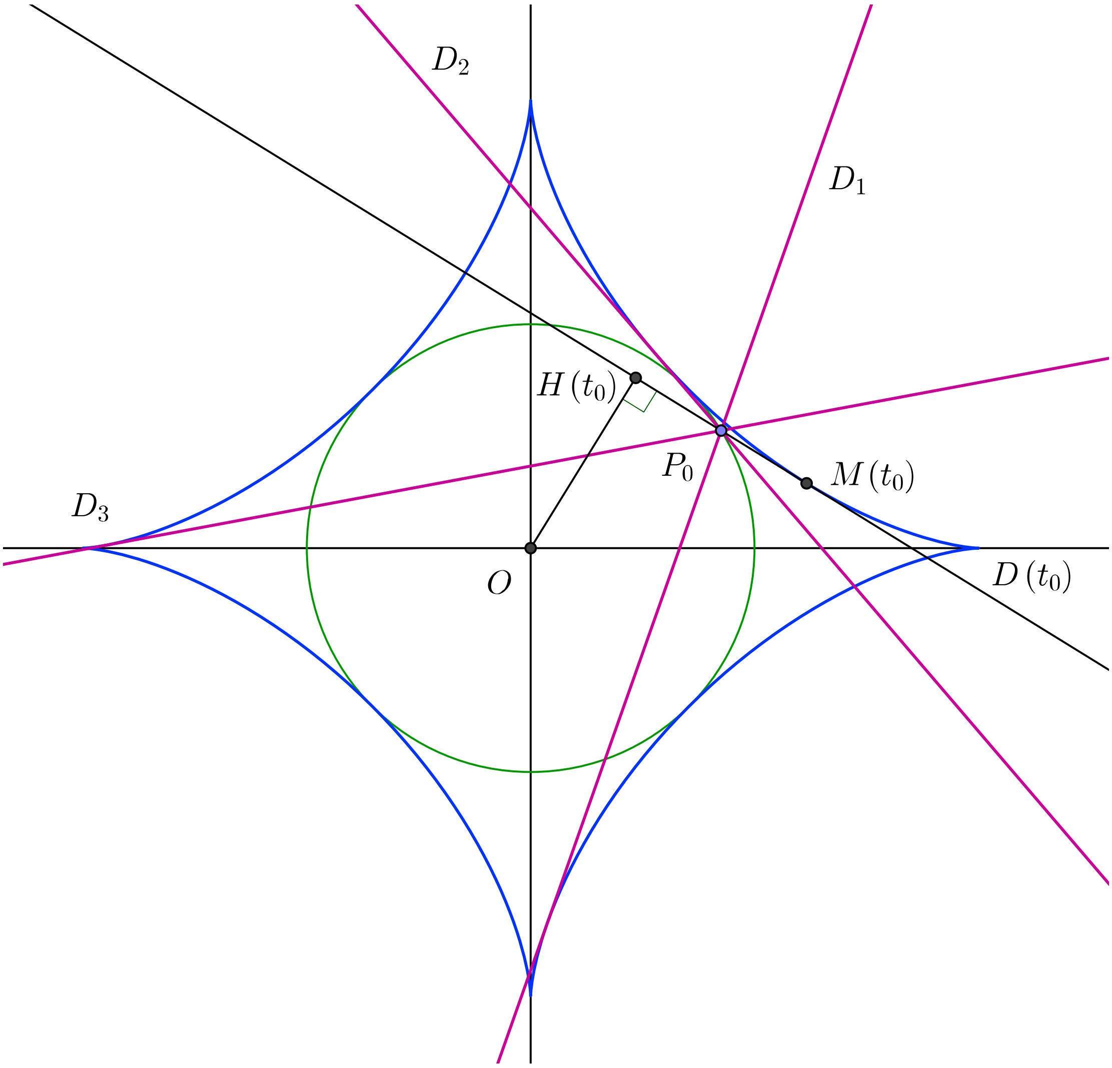
$$\boxed{D(t_0) \text{ est la droite passant par } P_0\text{, symétrique de } (OP_0) \text{ par rapport à } P_0 + \mathbb{R}.\vec{j}.}$$

<u>En pratique</u> : P_0 est le milieu de $(A(t_0), B(t_0))$, donc le cercle de centre P_0 de rayon $4a$ coupe Ox en O et en $A(t_0)$ et coupe Oy en O et en $B(t_0)$: il suffit de tracer ce cercle pour obtenir $A(t_0)$, $B(t_0)$ et donc $D(t_0)$ puisque c'est la droite qui les joint.

c) $\overrightarrow{OH(t_0)}$ est normal à $D(t_0)$, donc a des coordonnées de la forme $(\lambda\sin t_0, \lambda\cos t_0)$ et $H(t_0)$ est sur $D(t_0)$, d'où $\lambda = 8a\cos t_0 \sin t_0$, et

$$\overrightarrow{OH(t_0)} + \overrightarrow{OM(t_0)} = 2.\overrightarrow{OP_0} \text{ donc}$$

$$\boxed{M(t_0) \text{ est le symétrique de } H(t_0) \text{ par rapport à } P_0.}$$



Problème C : étude de la cissoïde droite

1) Le point M de coordonnées (x, y) appartient à C si et seulement si $(x + a)^2 + y^2 = a^2$, d'où

$$\boxed{C \text{ a pour équation cartésienne } x^2 + 2ax + y^2 = 0.}$$

2) Le point $M(t)$ a nécessairement des coordonnées de la forme (x, y) avec $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ et $y = tx$, d'où

$$x\left(x + 2a + t^2 x\right) = 0 \quad \text{soit} \quad \left(x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-2a}{1+t^2}\right)$$

et c'est cette dernière valeur qui est retenue d'après l'énoncé.

Réciproquement, le point de coordonnées $\left(\dfrac{-2a}{1+t^2}, \dfrac{-2at}{1+t^2}\right)$ appartient bien à l'intersection de C et de la droite d'équation $y = tx$.

$$\boxed{M(t) \text{ existe et a pour coordonnées cartésiennes } \left(\frac{-2a}{1+t^2}, \frac{-2at}{1+t^2}\right).}$$

Le point $H(t)$ a nécessairement des coordonnées cartésiennes de la forme (x, y) avec $x = 2a$ et $y = tx$. Réciproquement, le point de coordonnées $(2a, 2at)$ appartient bien à l'intersection de D et de la droite d'équation $y = tx$.

$$\boxed{H(t) \text{ existe et a pour coordonnées cartésiennes } (2a, 2at).}$$

D'où les coordonnées du milieu de $[M(t), H(t)]$:

$$\boxed{J(t) \text{ a pour coordonnées cartésiennes } x(t) = \frac{at^2}{1+t^2},\ y(t) = \frac{at^3}{1+t^2}.}$$

3) J est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et il vient :

$$\boxed{J'(t) \text{ a pour coordonnées } x'(t) = \frac{2at}{(1+t^2)^2},\ y'(t) = \frac{at^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}.}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{La courbe } t \mapsto J(t) \text{ admet comme unique point stationnaire le point de paramètre } t = 0.}$$

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, je peux lire leurs dérivées successives dans leurs développements limités, qui proviennent de la formule de Taylor. Or

$$x(t) \underset{0}{=} at^2\left(1 - t^2 + o\left(t^2\right)\right) \ ,\ y(t) \underset{0}{\sim} at^3 \quad \text{d'où} \quad x(t) \underset{0}{=} at^2 + o\left(t^3\right) \ ,\ y(t) \underset{0}{=} at^3 + o\left(t^3\right).$$

Il en résulte

$$\boxed{x''(0) = 2a \quad \text{et} \quad y''(0) = 0.}$$

Je lis aussi : $x'''(0) = 0$ et $y'''(0) = 6a$. En ce point stationnaire, $F''(0)$ est non nul et $F'''(0)$ n'est pas colinéaire au précédent. Il s'agit donc d'un point de rebroussement de première espèce, où la tangente est dirigée par $F''(0)$. Cette tangente n'est autre que l'axe Ox, d'équation cartésienne $y = 0$.

Au point (régulier) de paramètre $t_0 \neq 0$, la tangente à la courbe $t \mapsto J(t)$ a pour équation cartésienne (en simplifiant le vecteur directeur)

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{vmatrix} x - \frac{at_0^2}{1+t_0^2} & 2 \\ y - \frac{at_0^3}{1+t_0^2} & t_0\left(3+t_0^2\right) \end{vmatrix} = 0,$$

D'où le résultat (l'équation restant la bonne pour $t_0 = 0$ d'après ce qui précède) :

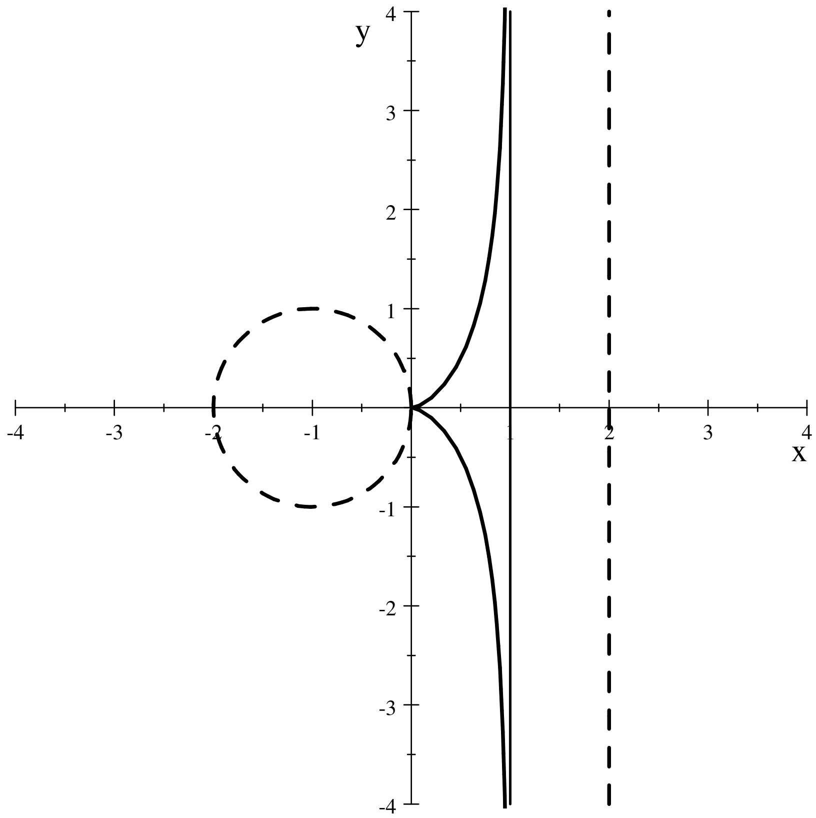
$$\boxed{\text{La tangente à la courbe } t \mapsto J(t) \text{ au point } J(t_0) \text{ a pour équation : } t_0\left(t_0^2+3\right)x - 2y = at_0^3.}$$

4) Il est clair que

$$\boxed{\text{Les deux fonctions } x \text{ et } y \text{ sont croissantes sur } \mathbb{R}^+ \text{ et } \lim_{+\infty} x = a,\ \lim_{+\infty} y = +\infty.}$$

Ainsi, la courbe admet pour asymptote la droite d'équation $x = a$, avec de plus $x \leq a$.

Enfin, $J(-t)$ est symétrique de $J(t)$ par rapport à Ox ; la portion de courbe décrite pour $t \in \mathbb{R}^-$ s'obtient donc à partir de celle décrite pour $t \in \mathbb{R}^+$ par symétrie par rapport à Ox. D'où le graphique (avec $a = 1$) :



5) Soient $t \in \mathbb{R}^*$ et $x = \dfrac{at^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{at^3}{1+t^2} = tx$ les coordonnées de $J(t)$. J'ai

$$x = \frac{at^2x^2}{x^2+t^2x^2} = \frac{ay^2}{x^2+y^2} \quad \text{d'où} \quad x\left(x^2+y^2\right) = ay^2,$$

relation vérifiée également par les coordonnées de $J(0) = O$. Donc le support de la courbe $t \mapsto J(t)$ est inclus dans la courbe d'équation cartésienne : $x\left(x^2+y^2\right) = ay^2$.

Réciproquement, soit M de coordonnées (x, y) tel que : $x\left(x^2+y^2\right) = ay^2$. Si $M = O$, alors $M = J(0)$, sinon x et y sont non nuls et je peux poser $t = y/x$; j'ai alors

$$y = tx \quad \text{et} \quad x^3\left(1+t^2\right) = at^2x^2 \quad \text{d'où} \quad x = \frac{at^2}{1+t^2},\ y = tx = \frac{at^3}{1+t^2},$$

donc $M = J(t)$. Finalement

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du support de la courbe } t \mapsto J(t) \text{ est : } x\left(x^2+y^2\right) = ay^2.}$$

6) a) Trois points de coordonnées $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ sont alignés si et seulement s'il existe une droite qui les contient (!!), c'est-à-dire si et seulement si

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad (a, b) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad \begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}.$$

Cette condition équivaut au fait que ce dernier système, d'inconnues (a, b, c) n'est pas de Cramer (s'il l'est, la seule solution est $(0, 0, 0)$; s'il ne l'est pas, il admet des solutions non nulles, a, b ne pouvant être tous deux nuls, puisque $a = b = 0 \Rightarrow c = 0$). En conclusion

$$\boxed{\text{Trois points de coordonnées } (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \text{ sont alignés si et seulement si } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.}$$

b) J'utilise la multilinéarité du déterminant et les opérations élémentaires indiquées :

$$a^2 \begin{vmatrix} t_1^2 & t_1^3 & 1+t_1^2 \\ t_2^2 & t_2^3 & 1+t_2^2 \\ t_3^2 & t_3^3 & 1+t_3^2 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - t_1C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} a^2 \begin{vmatrix} t_1^2 & 0 & 1 \\ t_2^2 & t_2^2(t_2-t_1) & 1 \\ t_3^2 & t_3^2(t_3-t_1) & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} a^2 \begin{vmatrix} t_1^2 & 0 & 1 \\ t_2^2 - t_1^2 & t_2^2(t_2-t_1) & 0 \\ t_3^2 - t_1^2 & t_3^2(t_3-t_1) & 0 \end{vmatrix}.$$

Soit, en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned} D(t_1, t_2, t_2) &= a^2(t_2-t_1)(t_3-t_1) \begin{vmatrix} t_2+t_1 & t_2^2 \\ t_3+t_1 & t_3^2 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} a^2(t_2-t_1)(t_3-t_1) \begin{vmatrix} t_2+t_1 & t_2^2 \\ t_3-t_2 & t_3^2-t_2^2 \end{vmatrix} \\ &= a^2(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2) \begin{vmatrix} t_2+t_1 & t_2^2 \\ 1 & t_3+t_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{D(t_1, t_2, t_3) = a^2(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1).}$$

Or, en notant $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ les coordonnées de $J(t_1), J(t_2), J(t_3)$, j'ai

$$D(t_1, t_2, t_3) = \left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)\left(1+t_3^2\right) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

D'où, d'après les résultats précédents :

$$\boxed{\text{Trois points distincts de paramètres } t_1, t_2, t_3 \text{ sont alignés si et seulement si : } t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 0.}$$

c) Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \neq 0$. D'après le résultat ci-dessus, la droite passant par $J(t_0)$ et $J(t_0+\varepsilon)$ passe par un troisième point $J(t(\varepsilon))$ si et seulement si

$$t_0(t_0+\varepsilon) + (t_0+\varepsilon)t(\varepsilon) + t(\varepsilon)t_0 = 0, \quad \text{soit} \quad (2t_0+\varepsilon)t(\varepsilon) = -t_0(t_0+\varepsilon).$$

Puisque l'énoncé dit que cette droite recoupe le support de la courbe $t \mapsto J(t)$, c'est que cette relation est vérifiée par $t(\varepsilon)$. Nécessairement $2t_0 + \varepsilon \neq 0$, car si $\varepsilon = -2t_0$, alors $2t_0^2 = 0$, ce qui contredit $\varepsilon \neq 0$. Ainsi

$$\boxed{t(\varepsilon) = -\frac{t_0(t_0+\varepsilon)}{2t_0+\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} -\frac{t_0}{2}.}$$

Or la position limite de la droite $\big(J(t_0)\,J(t_0+\varepsilon)\big)$ n'est autre que la tangente en $J(t_0)$ à la courbe $t \mapsto J(t)$. Donc :

$\boxed{\text{La tangente en } J(t_0) \text{ à la courbe } t \mapsto J(t) \text{ recoupe le support de celle-ci en } J(-t_0/2).}$

Or, si $J(t_1), J(t_2), J(t_3)$ sont alignés, d'après (ii) :

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 0 \quad \text{mézalor} \quad \left(-\frac{t_1}{2}\right)\left(-\frac{t_2}{2}\right) + \left(-\frac{t_2}{2}\right)\left(-\frac{t_3}{2}\right) + \left(-\frac{t_3}{2}\right)\left(-\frac{t_1}{2}\right) = 0 \text{ !!}$$

Par conséquent :

$\boxed{\text{Les tangentes en trois points alignés recoupent le support de la courbe en trois points alignés.}}$

Loi des idées révolutionnaires de Clarke

Toute idée révolutionnaire
— en science, politique, art, ou n'importe quoi d'autre —
provoque une réaction en trois étapes :

- « *C'est complètement impossible.* »
- « *C'est possible, mais ça n'en vaut pas la peine.* »
- « *J'ai toujours dit que c'était une bonne idée.* »

Deuxième loi de Clarke

Le seul moyen de découvrir les limites du possible est d'aller au-delà dans l'impossible.

Troisième loi de Clarke

Toute technologie suffisamment avancée est indiscernable de la magie.

Corollaire de Hargreave

Toute technologie qu'on peut distinguer de la magie n'est pas sufisamment avancée.

Corollaire de Pratchett

Toute magie suffisamment avancée est indiscernable de la technologie.