D.M. 5

Problème A : matrices à coefficients positifs

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) de sa structure euclidienne canonique, c'est-à-dire du produit scalaire suivant :

$$\text{si} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad , \quad (X|Y) = {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on sait qu'elle est orthonormale pour le produit scalaire précédent.

Dans la première partie, on donne deux exemples de matrices symétriques à coefficients positifs et on étudiera certaines de leurs propriétés ; la seconde partie traite plus généralement du cas des matrices symétriques à coefficients positifs.

Partie I

1) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Existe-t-il une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ où la matrice de f est diagonale ?
Quelle est cette matrice diagonale ? (On ne déterminera pas la base orthonormale.)

b) On classe les valeurs propres de f : $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$, on note $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une base orthonormale de vecteurs propres pour f, associés respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (on ne déterminera pas ces vecteurs).

Pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, $X = \sum_{i=1}^{3} x'_i . e'_i$, évaluer le produit scalaire $\big(f(X)\,|X\big)$.

Montrer que, pour tout vecteur X unitaire de $\mathbb{R}^3$ ($\|X\| = 1$), on a :

$$\lambda_1 \leq \big(f(X)\,|X\big) \leq \lambda_3.$$

2) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \big(\min(i,j)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$ ($\min(i,j)$ est le plus petit des entiers i, j).

a) Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure T, dont les coefficients sont des “1” ou des “0”, telle que $M = {}^tTT$.

b) Calculer le déterminant de M.

c) Montrer que : $\forall X \in \mathbb{R}^n \quad \big(f(X)\,|X\big) \geq 0$.

d) En déduire que les valeurs propres de f (ou de M) sont des réels strictement positifs.

Partie II

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, qui est non nul et symétrique (autoadjoint), c'est-à-dire

$$\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \big(f(X)\,|Y\big) = \big(X|f(Y)\big)\,.$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1) a) Rappeler brièvement pourquoi l'on sait que M est une matrice symétrique et que son polynôme caractéristique a toutes ses racines réelles. On les note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

b) Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de norme 1, montrer :

- $*$ $\lambda_1 \leq \big(f(X)\,|X\big) \leq \lambda_n$.
- $*$ $\big(f(X)\,|X\big) = \lambda_1 \Leftrightarrow f(X) = \lambda_1 . X$.
- $*$ $\big(f(X)\,|X\big) = \lambda_n \Leftrightarrow f(X) = \lambda_n . X$.

2) On suppose dorénavant que la matrice M a tous ses coefficients strictement positifs ($m_{i,j} > 0$).

a) Soit U un vecteur unitaire ($\|U\| = 1$) qui est vecteur propre de f pour la valeur propre λ_n, on note

$$U = \sum_{i=1}^{n} u_i.e_i \quad \text{et} \quad U' = \sum_{i=1}^{n} |u_i|.e_i\ .$$

(i) Donner l'expression de $\big(f(U)\,|U\big)$ en fonction des coefficients $m_{i,j}$ de M et des composantes u_i de U, en déduire $\big(f(U)\,|U\big) \leq \big(f(U')\,|U'\big)$, puis $f(U') = \lambda_n.U'$.

(ii) En comparant les expressions $\big(f(U)\,|U\big)$ et $\big(f(U')\,|U'\big)$, montrer que les composantes de U sont toutes de même signe ($\forall i \in \{1..n\} \quad u_i \geq 0 \quad \text{ou} \quad \forall i \in \{1..n\} \quad u_i \leq 0$).

En déduire que la dimension du sous-espace propre associé à λ_n est égale à 1 (on pourra éventuellement raisonner par l'absurde).

b) Soit λ_k une valeur propre de f différente de λ_n et Y un vecteur propre associé à cette valeur propre λ_k et de norme 1. On note

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i.e_i \quad \text{et} \quad Y' = \sum_{i=1}^{n} |y_i|.e_i\ .$$

(i) Établir : $\big|\big(f(Y)\,|Y\big)\big| \leq \big(f(Y')\,|Y'\big)$, puis $|\lambda_k| \leq \lambda_n$.

(ii) Calculer $\big(f(U')\,|Y\big)$, en déduire que les composantes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de Y ne sont pas toutes de même signe et qu'on a $\big|\big(f(Y)\,|Y\big)\big| < \big(f(Y')\,|Y'\big)$, puis $|\lambda_k| < \lambda_n$.

Problème B : étude de l'astroïde

$\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure d'espace euclidien, muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; a désigne un réel strictement positif fixé.

Soit (C) la courbe du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ décrite par le point $M(t)$ de coordonnées

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 8a\cos^3 t \\ y = 8a\sin^3 t \end{array} \right. ,\ t \in [-\pi, \pi]\,.$$

1) Étudier et construire la courbe (C). On mettra en évidence les axes de symétrie. On précisera la nature des points singuliers et les tangentes en ces points.

2) **a)** Montrer que la droite $D(t)$ tangente en $M(t)$ à (C) admet pour équation

$$x\sin t + y\cos t = 8a\sin t\cos t.$$

b) Soient $A(t)$ et $B(t)$ les points d'intersection avec les axes de coordonnées de la tangente $D(t)$ à (C) en un point régulier $M(t)$. Que peut-on dire de la longueur $A(t)B(t)$?

3) Soient $t_0 \in [-\pi, \pi]$ et P_0 le point du cercle de centre O et de rayon $4a$ tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OP_0}\right) = t_0$ (où $(\vec{u}, \vec{v})$ désigne l'angle orienté modulo 2π des deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

a) Montrer que par P_0 il passe en général quatre tangentes à (C). Montrer que trois de ces tangentes font entre elle deux à deux des angles égaux. Que peut-on dire de la quatrième ?

b) Indiquer une construction géométrique de la droite $D(t_0)$ à partir du point P_0.

c) Soit $H(t_0)$ la projection orthogonale de O sur $D(t_0)$.

Calculer $\overrightarrow{OH(t_0)} + \overrightarrow{OM(t_0)}$.

En déduire une construction géométrique de $M(t_0)$.

Problème C : étude de la cissoïde droite

Dans tout le problème, on se place dans un plan euclidien orienté, muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
a désigne un réel strictement positif fixé.
On désigne par D la droite d'équation $x = 2a$ et par C le cercle de centre $M_0\,(-a, 0)$, de rayon a.

Pour tout nombre réel t, on désignera par :

- $H\,(t)$ le point d'intersection, lorsqu'il existe, de la droite d'équation $y = tx$ et de la droite D.
- $M\,(t)$ le point d'intersection de la droite d'équation $y = tx$ et du cercle C (avec la convention que, lorsqu'il y a deux points d'intersection, $M\,(t)$ désigne le point d'intersection distinct de O).

1) Donner une équation cartésienne du cercle C.

2) Déterminer les coordonnées de $M\,(t)$ et $H\,(t)$, puis du milieu $J\,(t)$ du segment $[M\,(t)\,, H\,(t)]$.

3) Déterminer le vecteur dérivé à la courbe $t \mapsto J\,(t)$, puis en déduire les points stationnaires (c'est-à-dire non réguliers) de celle-ci et calculer le second vecteur dérivé au point de paramètre $t = 0$. En déduire que la tangente à la courbe $t \mapsto J\,(t)$ au point $J\,(t_0)$ a pour équation

$$t_0\left(t_0^2+3\right)x - 2y = at_0^3.$$

4) Dresser le tableau des variations des coordonnées $x\,(t)\,, y\,(t)$ du point $J\,(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^+$ et représenter sur une même figure la droite D, le cercle C et le support de cette courbe $t \mapsto J\,(t)$.

5) Donner enfin une équation cartésienne du support de la courbe $t \mapsto J\,(t)$.

6) <u>*Alignement de points sur la cissoïde droite*</u>

a) Montrer que trois points de coordonnées $(x_1, y_1)\,, (x_2, y_2)\,, (x_3, y_3)$ sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Factoriser le déterminant suivant, où t_1, t_2, t_3 désignent trois nombres réels donnés :

$$D\,(t_1, t_2, t_3) = \begin{vmatrix} at_1^2 & at_1^3 & 1+t_1^2 \\ at_2^2 & at_2^3 & 1+t_2^2 \\ at_3^2 & at_3^3 & 1+t_3^2 \end{vmatrix}.$$

En déduire à quelle condition nécessaire et suffisante portant sur t_1, t_2, t_3 trois points distincts de paramètres t_1, t_2, t_3 appartenant au support de la courbe $t \mapsto J\,(t)$ sont alignés.

c) La droite passant par $J\,(t_0)$ et $J\,(t_0+\varepsilon)$ recoupe le support de la courbe $t \mapsto J\,(t)$ en un point dont on note le paramètre $t\,(\varepsilon)$. Exprimer $t\,(\varepsilon)$ à l'aide de t_0 et ε et préciser la limite de $t\,(\varepsilon)$ lorsque ε tend vers 0. En déduire que la tangente en $J\,(t_0)$ à la courbe $t \mapsto J\,(t)$ recoupe le support de celle-ci en $J\,(-t_0/2)$ et que les tangentes en trois points alignés recoupent le support de la courbe en trois points alignés.

Le hasard ne favorise que les esprits préparés.

(Louis Pasteur)