Problème A : *intégrale de Dirichlet*

1) C'est un exemple du cours : soient ε et X tels que $0<\varepsilon<X$; j'intègre par parties :

$$\int_\varepsilon^X \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \left[(1-\cos t)\frac{1}{t}\right]_\varepsilon^X + \int_\varepsilon^X \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\ .$$

Comme les fonctions intégrées se prolongent par continuité en 0, j'obtiens lorsque ε tend vers 0

$$\int_0^X \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{1-\cos X}{X} + \int_0^X \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\ .$$

Or $\dfrac{1-\cos X}{X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la fonction $t\mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ (prolongée par continuité en 0) est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs positives, et $O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$). En conclusion

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^+}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t,$$

ce qui donne un sens à l'intégrale généralisée

$$\boxed{I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\,]0,\pi[$. J'ai

$$\forall k\in[\![1,n]\!]\quad 2\sin x\cos 2kx = \sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x,$$

d'où, en constatant l'hécatombe

$$\sum_{k=1}^n 2\sin x\cos 2kx = \sin(2n+1)x - \sin x.$$

Il n'y a plus qu'à diviser par $\sin x$ (qui est strictement positif)

$$\boxed{\forall x\in\,]0,\pi[\quad \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1+2\sum_{k=1}^n\cos 2kx.}$$

(Autres idées : récurrence ou utilisation de $\sum e^{2ikx}\ldots$)

La fonction $x\mapsto\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ se prolonge par continuité en 0 et j'obtiens en intégrant la relation précédente (par linéarité de l'intégrale, il s'agit d'une somme finie !) :

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}+2\sum_{k=1}^n\int_0^{\pi/2}\cos 2kx\mathrm{d}x,$$

soit

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.}$$

3) a) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$; pour $n\in\mathbb{N}^*$, j'intègre par parties (f et $x\mapsto -\dfrac{\cos nx}{n}$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$I_n = \left[-f(x)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x,$$

d'où, en notant $M_0=\sup\limits_{[0,\pi/2]}|f|$ et $M_1=\sup\limits_{[0,\pi/2]}|f'|$, $|I_n|\le\frac{2M_0}{n}+\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}M_1$. Il en résulte que

$$\boxed{\text{La suite de terme général } I_n=\int_0^{\pi/2}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \text{ converge vers 0.}}$$

b) Par construction, f est continue sur $[0,\pi/2]$, de classe $\mathcal{C}^1$ (car $\mathcal{C}^2$) sur $]0,\pi/2]$ avec, en utilisant la formule de Taylor-Young pour g et pour g' :

$$\begin{aligned}\forall x\in\,]0,\pi/2]\quad f'(x) &= \frac{xg'(x)-g(x)+g(0)}{x^2}\\ &= \frac{x\left(g'(0)+xg''(0)+o(x)\right)-\left(g(0)+xg'(0)+\dfrac{x^2}{2}g''(0)+o\left(x^2\right)\right)+g(0)}{x^2}\\ &= \frac{g''(0)}{2}+o(1)\end{aligned}$$

Par conséquent, f' admet une limite finie en 0, donc (théorème de la limite de la dérivée)

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi/2].}$$

D'après le **a)**, la suite de terme général I_n converge vers 0, où :

$$I_n=\int_0^{\pi/2} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{g(x)-g(0)}{x}\sin nx\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{g(x)\sin nx}{x}\mathrm{d}x-g(0)\int_0^{\pi/2}\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x.$$

Cette dernière égalité est justifiée par l'intégrabilité des deux fonctions apparaissant (elles se prolongent par continuité en 0). Ainsi, grâce au changement de variable $t=nx$:

$$I_n=J_n-g(0)\int_0^{n\pi/2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,\quad\text{soit}\quad J_n=g(0)\,\Phi(n\pi/2)+I_n,$$

où $\Phi : X\mapsto\displaystyle\int_0^X\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ admet pour limite I en $+\infty$ (d'après **1)**). Finalement :

$$\boxed{\text{La suite de terme général } J_n=\int_0^{\pi/2} g(x)\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x \text{ converge vers } I\cdot g(0).}$$

4) $g : x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x}{\sin x} & \text{si } x\in\,]0,\pi/2]\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ est l'inverse de $h : x\mapsto\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x\in\,]0,\pi/2]\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$, qui est la restriction à $[0,\pi/2]$ d'une fonction (classiquement) développable en série entière (donc $\mathcal{C}^\infty$!) sur $\mathbb{R}$. Comme h ne s'annule pas, $g=1/h$ est également $\mathcal{C}^\infty$, en particulier

$$\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,\pi/2].}$$

5) Appliqué à cette fonction g, le **2)** m'apprend que la suite (J_n) converge vers I (puisque $g(0)=1$). Or le **2)** montre que $J_{2n+1}=\dfrac{\pi}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, d'où, par unicité de la limite de cette suite extraite

$$\boxed{I=\frac{\pi}{2}.}$$

Problème B

Partie 1

1) $c = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\exp(2i\pi/3)$. Donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ c^n = 2^n \exp\left(i\frac{2n\pi}{3}\right).}$$

2) H est continue sur $\mathbb{R}^+$ et, si M désigne un majorant de $|h|$, qui est bornée sur $\mathbb{R}^+$ par hypothèse, j'ai :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |H(t)| \leq M t^n \exp(-t^\alpha)$$

or

$$t^2 \cdot \left(t^n \exp(-t^\alpha)\right) = \exp\left(-t^\alpha\left(1 - \frac{(n+2)\ln t}{t^\alpha}\right)\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{car } \alpha > 0)$$

donc $|H(t)| \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par comparaison à une intégrale de Riemann $(2 > 1)$, j'en déduis que :

$$\boxed{H \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+.}$$

3) a) I_n existe d'après **2)** (avec $h = 1$ et $\alpha = 1$) ; de même pour J_n (avec $h = 1$ et $\alpha = \dfrac{1}{3}$) :

$$\boxed{I_n \text{ et } J_n \text{ existent.}}$$

Pour $n \geq 1$, les fonctions $u : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto \dfrac{\exp(ct)}{c}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et le produit uv a des limites finies (nulles) en 0 et en $+\infty$ (puisque $|\exp(ct)| = \exp(-t)$) ; je peux donc intégrer par parties sur $[0, +\infty[$:

$$n! I_n = \int_0^{+\infty} t^n \exp(ct)\,\mathrm{d}t = \left[t^n \frac{\exp(ct)}{c}\right]_0^{+\infty} - \frac{n}{c}\int_0^{+\infty} t^{n-1}\exp(ct)\,\mathrm{d}t$$

d'où en divisant par $n!$:

$$I_n = -\frac{1}{c} I_{n-1}.$$

De même : $I_0 = \left[\dfrac{\exp(ct)}{c}\right]_0^{+\infty} = -\dfrac{1}{c}$. D'où, par une récurrence immédiate :

$$\boxed{I_n = \left(-\frac{1}{c}\right)^{n+1}.}$$

b) J'effectue le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = \sqrt[3]{t}$ (soit $t = u^3$) pour obtenir :

$$J_n = \frac{1}{(3n+3)!}\int_0^{+\infty} u^{3n}\exp(cu)\cdot 3u^2\mathrm{d}u = \frac{1}{n+1}\cdot I_{3n+2}.$$

Or

$$(-c)^{3n+3} = \left(-c^3\right)^{n+1} = (-8)^{n+1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{J_n = \frac{1}{n+1}\cdot I_{3n+2} = \frac{1}{(n+1)\,r^{n+1}} \text{ avec } r = -8.}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$; notons que :

$$\int_0^{+\infty} t^n \varphi(t)\,\mathrm{d}t = (3n+3)!\,\mathrm{Im}\,J_n.$$

Or J_n est réelle d'après la question précédente, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} t^n \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.}$$

Partie 2

D'après l'hypothèse et grâce à la linéarité de l'intégrale, j'obtiens : $\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \int_a^b P(t)\, f(t)\, \mathrm{d}t = 0.$

Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, le théorème de Weierstrass me fournit une suite (P_n) de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$. De plus f est continue sur un segment, donc bornée ; soit M un majorant de $|f|$, j'ai :

$$\forall t \in [a, b] \quad \left|P_n(t)\, f(t) - f(t)^2\right| \leq M\, |P_n(t) - f(t)| \leq M \sup_{[a,b]} |P_n - f|\,.$$

Comme la suite de fonctions (P_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, il en résulte que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément vers f^2 sur le segment $[a, b]$, je peux donc intervertir limite et intégrale et :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b P_n f = \int_a^b f^2 \quad \text{or} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_a^b P_n f = 0,$$

d'où par unicité de la limite : $f^2 = 0$. f^2 étant continue et positive sur $[a, b]$, j'en déduis que f^2 est nulle sur $[a, b]$, donc que :

$$\boxed{\forall x \in [a, b] \quad f(x) = 0.}$$

Nous avons vu à la partie **1** que ce résultat peut être en défaut sur un intervalle qui n'est pas un segment !

Partie 3 – Injectivité de la transformation de Laplace

1) a) Par composition de limites, comme $-\ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, j'obtiens : $\widehat{f}(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 = \widehat{f}(0)$; par ailleurs, comme composée de fonctions continues, $\widehat{f}$ est continue sur $]0, 1]$; finalement :

$$\boxed{\widehat{f} \text{ est continue sur } [0, 1].}$$

b) $t \mapsto f(t) \exp(-nt)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et, puisque $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $n \geq 1$, j'ai

$$t^2 f(t) \exp(-nt) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{d'où} \quad f(t) \exp(-nt) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Il en résulte que :

$$\boxed{t \mapsto f(t) \exp(-nt) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+ \text{ pour tout } n \geq 1.}$$

c) Pour $n \geq 1$, j'effectue le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $t = -\ln x$ $(x = e^{-t})$:

$$\int_0^1 \widehat{f}(x)\, x^{n-1} \mathrm{d}x = \int_{+\infty}^0 f(t) \left(e^{-t}\right)^{n-1} \left(-e^{-t}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-nt)\, \mathrm{d}t$$

autrement dit :

$$\boxed{\int_0^1 \widehat{f}(x)\, x^{n-1} \mathrm{d}x = a_n \text{ , cela pour tout } n \geq 1.}$$

d) Supposons que a_n est nul pour tout entier $n \geq 1$, alors $\widehat{f}$ est nulle sur $[0, 1]$ d'après la partie **2** or pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $f(t) = \widehat{f}\left(e^{-t}\right)$, d'où le résultat :

$$\boxed{\text{Si } a_n \text{ est nul pour tout entier } n \geq 1, \text{ alors } f \text{ est nulle sur } \mathbb{R}^+.}$$

2) a) Soit $m > \alpha$; $t \mapsto F(t) \exp(-mt)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et

$$F(t) \exp(-mt) = \frac{F(t)}{\exp(\alpha t)} \exp(-(m - \alpha)\, t)$$

or $t \mapsto \dfrac{F(t)}{\exp(\alpha t)}$ est bornée par hypothèse et $m - \alpha > 0$; j'en déduis comme précédemment que

$$\boxed{t \mapsto F(t) \exp(-mt) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+, \text{ cela pour tout } m > \alpha.}$$

b) Fixons $\beta > \alpha$; la fonction $f : t \mapsto F(t)\exp(-\beta t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, admet une limite nulle en $+\infty$ puisque $\beta > \alpha$ (procéder comme à la question précédente) ; en outre, pour tout $n \geq 1$ j'ai

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad f(t)\exp(-nt) = F(t)\exp(-(n+\beta)t)$$

et $n + \beta > \alpha$, donc d'après l'hypothèse :

$$a_n = \int_0^{+\infty} f(t)\exp(-nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

cela pour tout $n \geq 1$; donc f est nulle sur $\mathbb{R}^+$, d'après **1)** et comme $\exp(-\beta t)$ ne s'annule pas, il en résulte que F est nulle également sur $\mathbb{R}^+$.

$$\boxed{\text{Si : } \forall m > \alpha \quad \int_0^{+\infty} F(t)\exp(-mt)\,\mathrm{d}t = 0, \text{ alors } F \text{ est nulle sur } \mathbb{R}^+.}$$

<u>**N.B.**</u> C'est bien l'injectivité annoncée, puisque la fonction $m \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)\exp(-mt)\,\mathrm{d}t$ n'est autre que la transformée de Laplace de F.

Problème C

1) <u>*Étude de E*</u>

a) 0 est dans E et, comme l'espace L des fonctions continues et intégrables sur I est lui-même un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. De plus, on vérifie aisément que $u \mapsto e^{-u}$ appartient à E ; enfin, par définition de l'intégrabilité, si $f \in E$, alors $|f| \in E$ ainsi,

$$\boxed{E \text{ est un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel non réduit à } \{0\} \text{ et stable par l'application } f \mapsto |f|.}$$

b) Soient $f \in L$ et $s > 0$; j'ai f continue et : $\forall u \in I \quad \left|\dfrac{f(u)}{u+s}\right| \leq \dfrac{1}{s}|f(u)|$; comme f est intégrable sur I par hypothèse, il en résulte que $f \in E$: donc $L \subset E$.

De plus cette inclusion est stricte : par exemple, $f_{1/2} : u \mapsto 1/\sqrt{u}$ appartient à E (voir au **c)**) tandis qu'elle n'est pas dans L (non intégrable sur $[1, +\infty[$ car $1/2 \leq 1$).

$$\boxed{L \text{ est strictement inclus dans } E.}$$

c) Pour tout α, f_α est continue sur I ; d'après les propriétés sur les intégrales de Riemann, pour $s > 0$, $u \mapsto \dfrac{1}{u^{1-\alpha}(u+s)}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $1 - \alpha < 1$, c'est-à-dire $\alpha > 0$, et intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $2 - \alpha > 1$, c'est-à-dire $\alpha < 1$. Par conséquent,

$$\boxed{f_\alpha \in E \text{ si et seulement si } \alpha \in]0, 1[.}$$

Soient alors $\alpha \in]0, 1[$ et $s > 0$; j'effectue le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = ts$ pour obtenir :

$$\widehat{f_\alpha}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+s}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}s^{\alpha-1}}{ts+s}s\mathrm{d}t = s^{\alpha-1}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\mathrm{d}t = f_\alpha(s)\cdot\widehat{f_\alpha}(1) \;;$$

autrement dit :

$$\boxed{\widehat{f_\alpha} = \widehat{f_\alpha}(1)\cdot f_\alpha \text{ où } \widehat{f_\alpha}(1) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\mathrm{d}t.}$$

2) <u>*Propriétés de $\widehat{f}$*</u>

a) Fixons $f \in E$ et $a > 0$;

* pour tout s de $[a, +\infty[$, la fonction $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s}$ est continue par morceaux sur I

* pour tout u de I, la fonction $s \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s}$ est continue sur $[a, +\infty[$

* <u>hypothèse de domination</u> : $\forall (s,u) \in [a, +\infty[\times I \quad |g(s,u)| \leq \dfrac{|f(u)|}{u+a}$ où la fonction $u \mapsto \dfrac{|f(u)|}{u+a}$ est continue et intégrable sur I, puisque $|f| \in E$.

Le théorème de continuité sous le signe $\int$ montre alors que $\widehat{f}$ est continue sur $[a,+\infty[$, cela pour tout $a>0$, donc :

$$\boxed{\widehat{f} \text{ est continue sur } I.}$$

Pour montrer que $\lim\limits_{+\infty} \widehat{f} = 0$, j'utilise la caractérisation séquentielle de la limite : soit (s_n) une suite de limite $+\infty$; je dispose donc de p dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq p \quad s_n \geq 1$. Soit alors $(g_n)_{n\geq p}$ la suite de fonctions définie par $g_n : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s_n}$; les g_n sont continues, intégrables sur I, puisque $f\in E$; la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur I vers 0, qui est continue, et vérifie l'hypothèse de domination :

$$\forall n \geq p \quad \forall u \in I \quad |g_n(u)| \leq \frac{|f(u)|}{u+1} \quad (\text{car } s_n \geq 1)$$

où $u \mapsto \dfrac{|f(u)|}{u+1}$ est intégrable sur I ; ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\widehat{f}(s_n)\right)$ converge vers 0, ceci pour toute suite (s_n) de limite $+\infty$, par conséquent :

$$\boxed{\lim_{+\infty} \widehat{f} = 0.}$$

b) La même méthode que ci-dessus (en dominant $\left|\dfrac{f(u)}{\frac{u}{s_n}+1}\right|$ par $|f(u)|$, f étant ici intégrable) permet de prouver que :

$$\boxed{\lim_{s\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{\frac{u}{s}+1}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} f.}$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{\frac{u}{s}+1}\mathrm{d}u = s\cdot \widehat{f}(s)$, j'en déduis que :

$$\boxed{\text{Si } \int_0^{+\infty} f \neq 0, \text{ alors } \widehat{f}(s) \underset{s\to+\infty}{\sim} \frac{1}{s}\cdot\int_0^{+\infty} f\ .}$$

3) *Transformée de Laplace d'un élément de E*

a) Comme $x>0$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(e^{-xu}(1+u)\right) = e^{-xu}(1-x-xu)\ ,$$

la fonction $u\mapsto e^{-xu}(1+u)$ atteint son maximum – sur $\mathbb{R}^+$ – en $u=0$ si $x>1$ (fonction décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$), en $u=\dfrac{1-x}{x}$ si $0<x<1$; de plus, si $0<x_1<x_2$, j'ai

$$\forall u \in \mathbb{R}^{+*} \quad M(x_1) \geq e^{-x_1u}(1+u) > e^{-x_2u}(1+u)\ ,$$

d'où $M(x_1) \geq M(x_2)$. Finalement :

$$\boxed{M(x) \text{ existe bien et } 0<x_1<x_2 \Rightarrow M(x_1)\geq M(x_2).}$$

b) Soient $f\in E$ et $x>0$; j'ai, par définition de $M(x)$:

$$\forall u \in \mathbb{R}^{+*} \quad \left|e^{-xu}f(u)\right| \leq M(x)\cdot\frac{|f(u)|}{u+1}\ ;$$

or, par définition de E, la fonction $u\mapsto \dfrac{|f(u)|}{u+1}$ est intégrable sur I, il en est donc de même de $u\mapsto e^{-xu}f(u)$, ceci pour tout $x>0$. Autrement dit $f\in F$, ceci pour tout f de E :

$$\boxed{E\subset F.}$$

c) Fixons $f\in E$ et $a>0$;

* pour tout x de $[a,+\infty[$, la fonction $u\mapsto e^{-xu}f(u)$ est continue par morceaux sur I
* pour tout u de I, la fonction $x\mapsto e^{-xu}f(u)$ est continue sur $[a,+\infty[$

* hypothèse de domination :

$$\forall (x,u) \in [a,+\infty[\times I \quad \left|e^{-xu} f(u)\right| \leq M(a) \cdot \frac{|f(u)|}{u+1} \quad (\text{car } M(x) \leq M(a))$$

où la fonction $u \mapsto \dfrac{|f(u)|}{u+1}$ — indépendante de x — est intégrable sur I. Le théorème de continuité sous le signe $\int$ indique alors que Lf est continue sur $[a,+\infty[$, cela pour tout $a>0$, donc :

$$\boxed{Lf \text{ est continue sur } I.}$$

En réutilisant le procédé du **2)a)**, je montrerais que

$$\boxed{\lim_{+\infty} Lf = 0.}$$

Si je suppose f intégrable sur I, je peux appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$ à Lf sur $\mathbb{R}^+$, car je dispose alors de la domination :

$$\forall (x,u) \in \mathbb{R}^+ \times I \quad \left|e^{-xu} f(u)\right| \leq |f(u)|$$

avec $|f|$ intégrable sur I. Ainsi Lf est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ et admet donc pour limite (finie !) en 0^+ $Lf(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f$:

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est intégrable sur } I, \text{ alors } Lf \text{ admet une limite finie en } 0^+.}$$

Soit $f : u \mapsto 1/\sqrt{u}$; Lf est décroissante sur I et admet donc dans $\overline{\mathbb{R}}$ une limite en 0^+, la borne supérieure de $\{Lf(x),\ x \in I\}$; or

$$\forall A>0 \quad \forall x>0 \quad \lim_{0^+} Lf \geq Lf(x) \geq \int_0^A \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u \geq e^{-xA} \int_0^A \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = e^{-xA} \cdot 2\sqrt{A}$$

d'où : $\forall A>0 \quad \lim\limits_{0^+} Lf \geq 2\sqrt{A}$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Pour } f : u \mapsto 1/\sqrt{u},\ \lim_{0^+} Lf = +\infty.}$$

4) *Transformée de Laplace d'une fonction de type Lf, $f \in E$*

a) J'applique à nouveau le théorème de continuité sous le signe $\int$:

* pour tout x de I, la fonction $u \mapsto e^{-xu} f(u)$ est continue par morceaux sur $[1/n, n]$
* pour tout u de $[1/n, n]$, la fonction $x \mapsto e^{-xu} f(u)$ est continue sur I
* hypothèse de domination : $\forall (x,u) \in I \times [1/n, n] \quad |e^{-xu} f(u)| \leq |f(u)|$ où f est intégrable sur $[1/n, n]$ (car continue sur un **segment** !).

Par conséquent,

$$\boxed{g_n \text{ est continue sur } I.}$$

De plus, f est élément de E, donc de F, donc, pour tout x de I, la fonction $u \mapsto e^{-xu} f(u)$ est intégrable sur I ; or $1/n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (!), donc la suite $(g_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers $Lf(x)$.

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (g_n)_{n\geq 1} \text{ converge simplement vers } Lf \text{ sur } I.}$$

b) Soit $s \in I$; d'après le théorème de Fubini, j'ai :

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{-sx} g_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \left[\int_{1/n}^n e^{-sx} e^{-xu} f(u)\,\mathrm{d}u\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{1/n}^n f(u) \left[\int_a^b e^{-(s+u)x} \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}u \\
&= \int_{1/n}^n f(u) \left[-\frac{e^{-(s+u)x}}{s+u}\right]_{x=a}^{x=b} \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Autrement dit, par linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{\int_a^b e^{-sx} g_n(x)\,\mathrm{d}x = e^{-sa}\int_{1/n}^n e^{-au}\frac{f(u)}{u+s}\mathrm{d}u - e^{-sb}\int_{1/n}^n e^{-bu}\frac{f(u)}{u+s}\mathrm{d}u.}$$

Passons à la limite pour $n \to \infty$; j'ai :

$$\forall u \in I \quad \left|e^{-au}\frac{f(u)}{u+s}\right| \leq \frac{|f(u)|}{u+s}$$

et $|f| \in E$, donc la fonction $u \mapsto e^{-au}\dfrac{f(u)}{u+s}$ est intégrable sur I, de même pour $u \mapsto e^{-bu}\dfrac{f(u)}{u+s}$; par conséquent, le second membre de l'égalité ci-dessus a pour limite

$$e^{-sa}\int_0^{+\infty} e^{-au}\frac{f(u)}{u+s}\mathrm{d}u - e^{-sb}\int_0^{+\infty} e^{-bu}\frac{f(u)}{u+s}\mathrm{d}u.$$

Pour le membre de gauche, j'applique le théorème de convergence dominée :
soit $h_n : x \mapsto e^{-sx}g_n(x)$; la suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $[a,b]$ vers $x \mapsto e^{-sx}Lf(x)$, qui est continue sur $[a,b]$; je vérifie enfin l'hypothèse de domination :

$$\forall n \geq 1 \quad \forall x \in [a,b] \quad \left|e^{-sx}g_n(x)\right| \leq \left|\int_{1/n}^n e^{-xu}f(u)\,\mathrm{d}u\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xu}|f|(u)\,\mathrm{d}u = L|f|(x)$$

où $L|f|$ est bien définie (car $|f| \in E \subset F$) et continue donc intégrable sur le segment $[a,b]$.
J'en conclus que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b e^{-sx}g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b e^{-sx}Lf(x)\,\mathrm{d}x$$

et, en conclusion :

$$\boxed{\int_a^b e^{-sx}Lf(x)\,\mathrm{d}x = e^{-sa}\int_0^{+\infty} e^{-au}\frac{f(u)}{u+s}\mathrm{d}u - e^{-sb}\int_0^{+\infty} e^{-bu}\frac{f(u)}{u+s}\mathrm{d}u.}$$

c) Comme la fonction $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s}$ est intégrable sur I, je sais grâce au **3)c)** que

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-bu}\frac{f(u)}{u+s}\mathrm{d}s = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{a\to0^+}\int_0^{+\infty} e^{-au}\frac{f(u)}{u+s}\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty}\frac{f(u)}{u+s}\mathrm{d}s = \widehat{f}(s)$$

donc :

$$\boxed{\lim_{\substack{a\to0^+\\ b\to+\infty}}\int_a^b e^{-sx}Lf(x)\,\mathrm{d}x = \widehat{f}(s).}$$

d) De plus, pour x dans I, j'ai : $|Lf(x)| \leq L|f|(x)$; or, en appliquant la question précédente à $|f|$ (qui est dans E comme f), j'obtiens que $x \mapsto e^{-sx}L|f|(x)$ est intégrable sur I ; il en est donc de même de $x \mapsto e^{-sx}Lf(x)$, et par conséquent le résultat précédent donne :

$$\boxed{\forall s \in I \quad \int_0^{+\infty} e^{-sx}Lf(x)\,\mathrm{d}x = \widehat{f}(s).}$$

autrement dit :

$$\boxed{Lf \in F \text{ et } L(Lf) = \widehat{f}.}$$

5) Fixons $\alpha \in]0,1[$; f_α appartient à E d'après **1)c)** ; en effectuant le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = y/x$, j'obtiens :

$$Lf_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xu}u^{\alpha-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{x^\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-y}y^{\alpha-1}\mathrm{d}y = x^{-\alpha}\Gamma(\alpha).$$

Alors, d'après **4)d)** :

$$\widehat{f_\alpha}(1) = L(Lf_\alpha)(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}Lf_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{-\alpha}\mathrm{d}x = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

Autrement dit :

$$\boxed{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{1+u}\mathrm{d}u.}$$