D.M. 4

Problème A : *intégrale de Dirichlet*

1) À l'aide d'une intégration par parties, donner un sens à l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir : $\forall x \in \left]0, \pi\right[\quad \dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos 2kx$.

En déduire : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

3) a) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$; montrer à l'aide d'une intégration par parties que la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x) \sin nx \mathrm{d}x$ converge vers 0.

b) Soit g une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \pi/2]$ et $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} & \text{si } x \in \left]0, \pi/2\right] \\ g'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

En déduire que la suite de terme général $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g(x) \frac{\sin nx}{x} \mathrm{d}x$ converge vers $I.g(0)$.

4) Montrer que $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & \text{si } x \in \left]0, \pi/2\right] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \pi/2]$.

5) En déduire la valeur de I.

Problème B

Partie 1

Dans cette partie on définit la fonction φ sur $[0, +\infty[$ par : $\varphi(x) = \exp\left(-x^{1/3}\right) \sin\left(\sqrt{3} \cdot x^{1/3}\right)$.

1) On pose $c = -1 + i\sqrt{3}$. Pour tout entier naturel n calculer le module et un argument de c^n.

2) Montrer que si h est une fonction à valeurs complexes, bornée et continue sur $[0, +\infty[$, alors la fonction H définie par $t \mapsto t^n h(t) \exp(c \cdot t^\alpha)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, pour tout entier naturel n et pour tout réel $\alpha > 0$.

3) On pose pour tout entier naturel n :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} t^n \exp(c \cdot t) \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \frac{1}{(3n+3)!} \int_0^{+\infty} x^n \exp\left(c \cdot x^{1/3}\right) \mathrm{d}x.$$

a) Justifier l'existence de I_n et de J_n. Calculer I_n en fonction de n.

b) Calculer J_n à l'aide d'un changement de variable puis déterminer le réel $r < 0$ tel que pour tout entier naturel n :

$$J_n = \frac{1}{(n+1)\, r^{n+1}}.$$

4) En déduire que pour tout entier naturel n : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \varphi(t) \,\mathrm{d}t = 0$.

Partie 2

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ $(a < b)$, à valeurs réelles, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_a^b t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f est nulle sur $[a, b]$. *On admettra le théorème de Weierstrass : il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.*

Partie 3 – Injectivité de la transformation de Laplace

Dans cette partie f désigne une application continue sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles.
On pose, pour tout entier naturel non nul n, si la fonction $t \mapsto f(t)\exp(-nt)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$:

$$a_n = \int_0^{+\infty} f(t)\exp(-nt)\,\mathrm{d}t.$$

1) On suppose dans cette question que f admet une limite nulle en $+\infty$. On note $\widehat{f}$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\begin{cases} \widehat{f}(x) = f(-\ln x) & \text{si } x \in\,]0, 1] \\ \widehat{f}(0) = 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que $\widehat{f}$ est continue sur $[0, 1]$.

b) Prouver que $t \mapsto f(t)\exp(-nt)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

c) Établir que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $\displaystyle\int_0^1 \widehat{f}(x)\, x^{n-1}\mathrm{d}x = a_n$.

d) Montrer que, si a_n est nul pour tout entier $n \geq 1$, alors : $\forall t \in [0, +\infty[\quad f(t) = 0$.

2) Dans cette question, on suppose que F est une fonction continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles, et qu'il existe un réel α tel que F soit dominée, au voisinage de $+\infty$, par $t \mapsto \exp(\alpha t)$.

a) Prouver que pour tout réel $m > \alpha$ la fonction $t \mapsto F(t)\exp(-mt)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que, si l'on a

$$\forall m > \alpha \quad \int_0^{+\infty} F(t)\exp(-mt)\,\mathrm{d}t = 0,$$

alors F est nulle sur $[0, +\infty[$.

Problème C

On note E l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ à valeurs complexes telles que, pour tout nombre réel $s > 0$, la fonction $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s}$ soit intégrable sur I.
On note $\widehat{f}$ la fonction définie sur I par la formule

$$\widehat{f}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s}\mathrm{d}u.$$

1) <u>*Étude de E*</u>

a) Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et stable par l'application $f \mapsto |f|$.

b) On note L l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes continues et intégrables sur I. Comparer au sens de l'inclusion les espaces vectoriels L et E.

c) Pour tout nombre réel α, on note f_α la fonction définie sur I par la formule $f_\alpha(u) = u^{\alpha-1}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α appartient à E et prouver alors que $\widehat{f_\alpha}$ est proportionnelle à f_α. On exprimera le coefficient de proportionnalité à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

2) <u>*Propriétés de $\widehat{f}$*</u>

a) Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est continue sur I. Déterminer la limite de $\widehat{f}$ en $+\infty$.

b) On suppose de plus f intégrable sur I. Déterminer la limite, lorsque s tend vers $+\infty$, de

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{\dfrac{u}{s}+1} \mathrm{d}u.$$

À quelle condition ce résultat permet-il d'obtenir un équivalent de $\widehat{f}$ au voisinage de $+\infty$? Donner dans ce cas cet équivalent.

3) *Transformée de Laplace d'un élément de E*

On note F le sous-espace vectoriel des fonctions complexes continues sur I telles que, pour tout nombre réel $x > 0$, la fonction $u \mapsto e^{-xu} f(u)$ soit intégrable sur I.
La fonction Lf définie alors par la formule

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xu} f(u) \,\mathrm{d}u$$

s'appelle la transformée de Laplace de f.

a) Soit x un nombre réel > 0. Justifier l'existence du nombre réel $M(x) = \sup\limits_{u>0} \left(e^{-xu}(1+u)\right)$.

Comparer $M(x_1)$ et $M(x_2)$ lorsque $0 < x_1 < x_2$.

b) Montrer que E est contenu dans F.

c) Soit f une fonction appartenant à E. Montrer que la fonction Lf est continue sur I.
Quel est son comportement en $+\infty$?
Donner une condition suffisante portant sur f pour que Lf possède une limite finie en 0^+.
Donner un exemple de fonction réelle appartenant à E telle que $\lim\limits_{x \to 0^+} Lf(x) = +\infty$.

4) *Transformée de Laplace d'une fonction de type Lf, $f \in E$*

Soit f un élément de E.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction définie sur I par la formule : $g_n(x) = \displaystyle\int_{1/n}^{n} e^{-xu} f(u) \,\mathrm{d}u$.

Montrer que g_n est continue sur I. Quel lien existe-t-il entre la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ et la fonction Lf ?

b) Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout s de I, montrer que

$$\int_a^b e^{-sx} g_n(x) \,\mathrm{d}x = e^{-sa} \int_{1/n}^{n} e^{-au} \frac{f(u)}{u+s} \mathrm{d}u - e^{-sb} \int_{1/n}^{n} e^{-bu} \frac{f(u)}{u+s} \mathrm{d}u.$$

On admettra le théorème de Fubini *: si h est continue sur $[a,b] \times [c,d]$, alors*

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(x,y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b h(x,y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

En déduire que

$$\int_a^b e^{-sx} Lf(x) \,\mathrm{d}x = e^{-sa} \int_0^{+\infty} e^{-au} \frac{f(u)}{u+s} \mathrm{d}u - e^{-sb} \int_0^{+\infty} e^{-bu} \frac{f(u)}{u+s} \mathrm{d}u.$$

c) Montrer que $\displaystyle\int_a^b e^{-sx} Lf(x) \,\mathrm{d}x$ admet une limite lorsque a tend vers 0 et que b tend vers $+\infty$.

d) Montrer que Lf est dans F et que sa transformée de Laplace est $\widehat{f}$, c'est-à-dire que, pour tout $s \in I$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} Lf(x) \,\mathrm{d}x = \widehat{f}(s).$$

5) *Application* : soit α un élément de $]0,1[$. En considérant la fonction f_α définie au **1)c)**, établir que

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} \mathrm{d}u$$

où Γ est la fonction définie sur I par la formule

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\alpha-1} \mathrm{d}y.$$