Exercice

1) La série numérique $\sum u_n(0)$ converge banalement et a pour somme 0. Fixons donc $x \neq 0$; j'ai $u_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{xn^2}$ qui est le terme général d'une série convergente (série de Riemann : $2 > 1$). Comme en outre $\dfrac{1}{xn^2}$ est de signe constant (celui de x), il en résulte que $\sum u_n(x)$ converge également. Finalement,

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum u_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

Notons que — comme toutes les fonctions u_n sont impaires — la fonction somme S est impaire.

2) Je fixe $n \in \mathbb{N}^*$. En vertu des théorèmes opératoires classiques, u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u_n'(x) = \frac{1 - nx^2}{n(1+nx^2)^2}.$$

Comme u_n est impaire, j'étudie pour commencer ses variations sur $\mathbb{R}^+$: elle y est positive et atteint son maximum en $1/\sqrt{n}$, maximum valant

$$u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

De l'imparité de u_n, je déduis alors que $\sup_{\mathbb{R}} |u_n| = \dfrac{1}{2n^{3/2}}$. Comme $3/2 > 1$, la série numérique $\sum \sup_{\mathbb{R}} |u_n|$ converge, autrement dit

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum u_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}.}$$

En particulier, $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$; comme les u_n sont continues sur $\mathbb{R}$, il en résulte que

$$\boxed{\text{La fonction somme } S \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

3) Je montre pour commencer que S est $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de la forme $[a, M]$ où $0 < a < M$:

- les fonctions u_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a, M]$;
- $\sum u_n$ converge simplement sur $[a, M]$ (vu au **1)**) ;
- $\sum u_n'$ converge uniformément sur $[a, M]$: j'ai

$$\forall x \in [a, M] \quad |u_n'(x)| \leq \frac{1 + nM^2}{n(1+na^2)^2}.$$

Autrement dit

$$\sup_{[a,M]} |u_n'| \leq \frac{1+nM^2}{n(1+na^2)^2} \quad \text{or} \quad \frac{1+nM^2}{n(1+na^2)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{M^2}{a^2n^2}.$$

Ainsi, $\sup_{[a,M]} |u_n'|$ est majoré par le terme général d'une série numérique convergente (par comparaison à une série de Riemann, puisque $2 > 1$). Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, M]$.

Le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions s'applique donc : S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, M]$, pour tout (a, M) tel que $0 < a < M$, elle est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et aussi sur $\mathbb{R}^{-*}$ puisqu'elle est impaire. En particulier,

$$\boxed{S \text{ est dérivable en tout point } x \neq 0.}$$

4) **a)** Pour tout réel x non nul et tout $N \in \mathbb{N}^*$, j'ai, puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+nx^2)} \quad \text{soit} \quad \frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x}.$$

Je pose alors (habilement) $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{N}}$ et, pour x tel que $0 < |x| < \alpha$, j'ai

$$\forall n \in [\![1, N]\!] \quad nx^2 \leq N\alpha^2 = 1 \quad \text{donc} \quad 0 < 1 + nx^2 \leq 2 \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{1+nx^2} \geq \frac{1}{2}$$

et, par sommation

$$\boxed{\text{Pour } 0<|x|<\alpha,\ \frac{S(x)}{x}\geq\frac{S_N(x)}{x}\geq\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.}$$

b) Soit $A>0$; puisque la série harmonique diverge, je dispose de N dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}>A$. J'en déduis, grâce à la question précédente, $\alpha>0$ tel que

$$0<|x|<\alpha\Rightarrow\frac{S(x)}{x}>A.$$

Ainsi, $\mathbb{R}^*$ étant l'ensemble de définition de la fonction $x\mapsto\frac{S(x)}{x}$:

$$\forall A>0\quad\exists\alpha>0\quad\forall x\in\mathbb{R}^*\quad|x|<\alpha\Rightarrow\frac{S(x)}{x}>A.$$

Je reconnais la définition d'une limite infinie :

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{S(x)}{x}=+\infty.}$$

c) Comme $S(0)=0$, $\frac{S(x)}{x}$ n'est autre que le taux de variation de la fonction S entre 0 et x, le résultat précédent signifie donc que

$$\boxed{S\text{ n'est pas dérivable en }0.}$$

On peut préciser que le graphe de S admet une tangente en O portée par l'axe Oy.

Problème A – Plusieurs expressions de la constante d'Euler

1) Soit $p\in\mathbb{N}^*$;

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)&=\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{p}\left[\ln(n+1)-\ln n\right]\\&=\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}-\ln(p+1)+\ln 1\\&=\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}-\ln p-\ln\frac{p+1}{p}\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{2n^2}$, la série de terme général $\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est convergente (par comparaison à une série de Riemann : $2>1$). De plus, $\ln\frac{p+1}{p}\underset{p\to\infty}{\longrightarrow}0$, or, d'après le calcul précédent,

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}-\ln p=\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)+\ln\frac{p+1}{p}.$$

J'en déduis l'existence de la limite demandée et, par passage à la limite :

$$\boxed{\gamma=\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}-\ln p\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).}$$

2) Soient $p\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[0,x]$; puisque t est positif, $-t$ est différent de 1 et je peux appliquer la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $-t$:

$$\sum_{k=0}^{p}(-t)^k=\frac{1-(-t)^{p+1}}{1-(-t)}=\frac{1}{1+t}-\frac{(-1)^{p+1}t^{p+1}}{1+t},$$

autrement dit :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0,x] \qquad \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{p+1} t^{p+1}}{1+t}.}$$

J'en déduis, pour $p \in \mathbb{N}^*$, en intégrant de 0 à x et en réindexant la somme :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{p+1} \int_0^x \frac{t^{p+1}}{1+t} \mathrm{d}t\ ,$$

or, x étant dans $[0,1]$,

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^{p+1}}{1+t} \mathrm{d}t \leq \int_0^x t^{p+1} \mathrm{d}t = \frac{x^{p+2}}{p+2} \leq \frac{1}{p+2}.$$

Le “reste” intégral a donc pour limite 0 lorsque p tend vers l'infini ; il en résulte que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ converge et a pour somme $\ln(1+x)$:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.}$$

3) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, le résultat précédent s'applique avec $x = \dfrac{1}{n}$, d'où

$$\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{kn^k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{kn^k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k}\ ,$$

ce qui donne, reporté dans l'expression du **1)** :

$$\boxed{\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} \right).}$$

4) a) Les résultats sur la convergence des séries de Riemann montrent que ζ est définie sur $]1,+\infty[$; de plus, si $1 < \alpha < \alpha'$, j'ai

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n^\alpha \leq n^{\alpha'}\ ,\ \text{donc} \quad \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n^{\alpha'}}\ ,$$

d'où

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^{\alpha'}}.$$

En passant à la limite lorsque p tend vers l'infini (les deux séries convergent !) j'obtiens

$$\zeta(\alpha) \geq \zeta(\alpha').$$

En conclusion (sans dérivation terme à terme. . .) :

$$\boxed{\zeta \text{ est définie et décroissante sur }]1,+\infty[.}$$

Soient $x \in [1,+\infty[$ fixé et $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$; d'après la minoration ci-dessus (avec $\alpha = k$, $\alpha' = k+1$ et $p = E(x)$), j'ai $\sum\limits_{n=1}^{E(x)} \dfrac{1}{n^k} \geq \sum\limits_{n=1}^{E(x)} \dfrac{1}{n^{k+1}}$, d'où, comme $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{k+1}$, $|f_k(x)| \geq |f_{k+1}(x)|$.

De plus, puisque ζ est décroissante, $|f_k(x)| \leq \dfrac{1}{k}\zeta(k) \leq \dfrac{\zeta(2)}{k}$.

Il en découle que $|f_k(x)|$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini, donc finalement

$$\boxed{\text{La suite } (|f_k(x)|)_{k\geq 2} \text{ converge vers 0 en décroissant.}}$$

b) Le résultat précédent montre que, pour tout x de $[1,+\infty[$, la série alternée $\sum f_k(x)$ vérifie les hypothèses du théorème spécial, donc converge, avec en outre la majoration du reste $R_p = \sum\limits_{k=p+1}^{\infty} f_k$:

$$\forall p \geq 2 \quad \forall x \in [1,+\infty[\quad |R_p(x)| \leq |f_{p+1}(x)| \leq \frac{\zeta(2)}{p+1}, \quad \text{d'où} \quad \sup_{[1,+\infty[} |R_p| \leq \frac{\zeta(2)}{p+1} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent la suite (R_p) converge uniformément vers 0 sur $[1, +\infty[$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{k\geq 2} f_k \text{ est uniformément convergente sur } [1, +\infty[.}$$

5) D'après le **3)**,

$$\gamma = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{E(x)} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} \right).$$

Pour $x \geq 1$ fixé, j'ai affaire à un nombre fini de séries convergentes (pour $1 \leq n \leq E(x)$), d'où, par linéarité de la somme dans l'espace des séries numériques convergentes :

$$\sum_{n=1}^{E(x)} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{E(x)} \frac{(-1)^k}{kn^k} \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} f_k(x) \ ;$$

donc

$$\boxed{\gamma = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} f_k(x).}$$

Enfin, la série de fonctions $\sum f_k$ convergeant uniformément sur $[1, +\infty[$, $+\infty$ étant adhérent à cet intervalle et chaque fonction f_k admettant une limite finie en $+\infty$ (à savoir $\dfrac{(-1)^k}{k}\zeta(k)$), je peux appliquer le théorème de la double limite :

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k).$$

D'où, en comparant les deux derniers résultats :

$$\boxed{\gamma = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k).}$$

Problème B – Fonctions absolument monotones

Partie I

1) Par hypothèse, f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$, donc $f + g$ et fg également ; de plus $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont à valeurs positives (comprendre "positives ou nulles", je préciserai "strictement positives" si besoin). Il en résulte immédiatement que $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ (linéarité de la dérivation) et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$ (formule de Leibniz) sont à valeurs positives, cela pour tout n dans $\mathbb{N}$. Autrement dit

$$\boxed{f + g \text{ et } fg \text{ sont AM sur }]a, b[.}$$

2) De même, f étant $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$ et exp étant $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $g = e^f$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$. Je démontre par récurrence forte que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $g^{(n)}$ est à valeurs positives.

- $g^{(0)} = e^f$ est trivialement positive
- je suppose $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^{(k)}$ soit positive pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors $g' = f'g$ est également $\mathcal{C}^\infty$ et la formule de Leibniz, accompagnée de l'hypothèse de récurrence et du fait que f est AM, montre que

$$(g')^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

  est positive. Autrement dit $g^{(n)} \geq 0$, ce qu'il fallait démontrer.

En conclusion,

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est AM sur }]a, b[, \text{ alors } e^f \text{ est AM sur }]a, b[.}$$

3) a) J'utilise le développement en série entière de $\left(1-x^2\right)^{-1/2}$:

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\quad \left(1-x^2\right)^{-1/2} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{-(2n-1)}{2}}{n!}\left(-x^2\right)^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2}x^{2n}$$

dont tous les coefficients sont positifs, ce qui permet d'affirmer que toutes ses dérivées (qui se calculent par dérivation terme à terme, dans l'intervalle ouvert de convergence d'une série entière) sont à valeurs positives sur $]0,1[$.

$$\boxed{f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ est AM sur }]0,1[.}$$

b) arcsin est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$ et $\arcsin' = f$, dont toutes les dérivées sont positives sur $]0,1[$ d'après **a)**. Or ce sont les dérivées successives de arcsin à partir de l'ordre 1. Comme arcsin elle-même est positive,

$$\boxed{\text{arcsin est AM sur }]0,1[.}$$

c) Soit maintenant $g : \begin{array}{ccc}]0,\pi/2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x \end{array}$; g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\pi/2[$ et vérifie $g' = 1+g^2$, d'où, pour tout $n \geq 1$, à nouveau par la formule de Leibniz :

$$g^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} g^{(k)} g^{(n-k)}.$$

g et g' étant positives sur $]0,\pi/2[$, j'en déduis, par une récurrence forte et néanmoins immédiate :

$$\boxed{\text{tan est AM sur }]0,\pi/2[.}$$

4) a) Par hypothèse f est positive et croissante sur $]a,b[$; comme elle est croissante, f admet pour limite à droite en a, dans $\overline{\mathbb{R}}$ *a priori*, $\lambda = \inf\left\{f(x)\ ,\ x \in]a,b[\right\}$. De plus λ est réelle si et seulement si f est minorée (sinon $\lambda = -\infty$). Or ici f est minorée (par 0 !).

$$\boxed{\text{Il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda = \lim_{a^+} f.}$$

Ce résultat s'applique également à f', qui est également AM ! Par conséquent, f est continue sur $[a,b[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$ et f' admet une limite finie ℓ à droite en a : donc, grâce au théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable à droite en a, avec pour dérivée ℓ qui est justement la limite de f' à droite en a, donc

$$\boxed{f \text{ est dérivable à droite en } a \text{ et } f' \text{ est continue à droite en } a.}$$

b) Notons que la limite λ précédente, ainsi que $f'(a)$, sont positives, en tant que limites de fonctions à valeurs positives. De plus, le résultat du **a)** peut s'appliquer par récurrence à toutes les dérivées de f, qui sont bien AM... En conclusion,

$$\boxed{f \text{ est indéfiniment dérivable à droite en } a \text{ avec des dérivées positives.}}$$

Par contre, ce prolongement n'est pas toujours possible en b (f peut très bien avoir une limite infinie en b, voir l'exemple de la fonction tan au **3)**).

Partie II

1) a) À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral et du changement de variable $t = xu$, j'obtiens :

$$\forall x \in]0,b[\quad R_n(f,x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$

d'où : $\forall x \in]0,b[\quad \dfrac{R_n(f,x)}{x^n} = x\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u.$

Comme $f^{(n+1)}$ est croissante, il en résulte aisément que $x \mapsto \dfrac{R_n(f,x)}{x^n}$ l'est également.

Par ailleurs, d'après la formule de Taylor-Young, $R_n(f,x)$ est un $o(x^n)$, autrement dit

$$\frac{R_n(f,x)}{x^n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

En conclusion,

$$\boxed{x \mapsto \frac{R_n(f,x)}{x^n} \text{ est croissante sur }]0,b[\text{ et admet une limite nulle en } 0^+.}$$

b) Soit x fixé dans $]0,b[$; j'ai vu que, pour tout p dans $\mathbb{N}$, $R_p(f,x) \geq 0$; d'où

$$\sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x) - R_p(f,x) \leq f(x) \ ;$$

donc, les sommes partielles de la série numérique à termes positifs $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$ sont majorées par $f(x)$; il en résulte que cette série converge et que sa somme est au plus égale à $f(x)$:

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ converge pour tout } x \text{ de }]0,b[\text{ et sa somme } g \text{ vérifie } g \leq f.}$$

c) Fixons x, y tels que $0 < x < y < b$; d'après **a)**, j'ai, pour tout n : $0 \leq R_n(f,x)/x^n \leq R_n(f,y)/y^n$.
De plus : $R_n(f,y) = f(y) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} y^k \leq f(y)$, d'où

$$\boxed{0 \leq R_n(f,x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y).}$$

d) Comme $\frac{x}{y} \in]0,1[$, il en résulte que $\lim_{n\to\infty} R_n(f,x) = 0$ et finalement, par passage à la limite dans la formule de Taylor, $f(x) = g(x)$, cela pour tout x de $]0,b[$. Il reste à montrer que ce développement en série entière est valable aussi à gauche de 0. Je pose $\delta = \min(-a,b)$ et je constate que $]-\delta,\delta[\subset]a,b[$; alors pour $x \in]-\delta,0[$, j'ai $|x| \in]0,b[$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$|R_n(f,x)| = |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u \leq |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(|x|\,u)\,\mathrm{d}u$$

par croissance de l'intégrale, puisque $f^{(n+1)}$ est croissante et $xu \leq |x|\,u$!
Ainsi

$$|R_n(f,x)| \leq R_n(f,|x|).$$

J'en déduis, grâce au résultat précédent et au théorème d'encadrement, que $\lim_{n\to\infty} R_n(f,x) = 0$ pour tout x de $]-\delta,\delta[$ (c'est banal pour $x = 0$!). Finalement, f coïncide avec la somme de sa série de Taylor sur $]-\delta,\delta[$, c'est-à-dire que

$$\boxed{f \text{ est développable en série entière au voisinage de } 0.}$$

2) Le résultat précédent (sur $[0,b[$) s'applique à la fonction $\varphi : t \mapsto f(a+t)$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et a toute ses dérivées positives sur $[0,b-a[$; donc :

$$\forall t \in [0,b-a[\quad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$

Autrement dit, puisque $f(x) = \varphi(x-a)$:

$$\boxed{\forall x \in [a,b[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.}$$

3) Si f s'annule en $x_0 \in]a,b[$, alors f est nulle sur $]a,x_0]$ (car positive, croissante et nulle en x_0 donc négative !). Il en résulte que toutes les dérivées de f en x_0 sont nulles (car égales aux dérivées à gauche...). Alors d'après le **2)** (appliqué avec x_0 à la place de a), f est nulle sur $[x_0,b[$, car égale à la somme de sa série de Taylor en x_0 ; finalement :

$$\boxed{\text{Si } f \text{ AM sur }]a,b[\text{ s'annule en un point de }]a,b[, \text{ alors } f \text{ est nulle.}}$$

Analyse : je suppose que $f^{(p)}$ possède un zéro dans $]a,b[$; le résultat précédent me montre que $f^{(p)}$ est nulle (puisqu'elle est aussi AM sur $]a,b[$) ; donc f est un polynôme de degré au plus égal à $p-1$, avec en outre des dérivées en a toutes positives ou nulles, par passage à la limite en a.

Synthèse : soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{p-1} \alpha_n (x-a)^n$, $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) \in (\mathbb{R}^+)^p$; il est clair que f est AM sur $]a, b[$ et que $f^{(p)}$ possède un zéro sur $]a, b[$ (puisque $f^{(p)}$ est l'application nulle !).

$$\boxed{\text{L'ensemble cherché est } \left\{ f : x \mapsto \sum_{n=0}^{p-1} \alpha_n (x-a)^n \,,\ (\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) \in (\mathbb{R}^+)^p \right\}.}$$

Partie III

1) Il est clair que l'ensemble de définition de $\Delta_h(f)$ est $]a, b-h[$ et, par une récurrence immédiate,

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } \Delta_h^n(f) \text{ est }]a, b-nh[\text{ (intervalle éventuellement vide !).}}$$

2) L'énoncé est flou sur les valeurs de x à considérer. La relation est bien sûr à établir sur l'intersection des intervalles de définition des fonctions considérées, soit $J =]a, b-nh[$, en supposant toujours f définie sur $]a, b[$. Si J est vide, il n'y a rien à faire ! Sinon, je me place dans l'espace vectoriel E des applications de J dans $\mathbb{R}$. Comme l'énoncé le suggère, je constate que $\Delta_h = T_h - I$, où Δ_h, T_h et I sont dans $\mathcal{L}(E)$. Comme T_h et I commutent ($I = \mathrm{Id}_E$!), je peux appliquer la formule du binôme :

$$\Delta_h^n = (T_h - I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_h^k \circ (-I)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} T_h^k$$

d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]a, b-nh[\quad \Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh).}$$

3) L'indication de l'énoncé paraît bien compliquée... Je remarque que, puisque f est AM sur $]a, b[$, toutes ses dérivées le sont également, donc toutes ses dérivées sont croissantes, donc toutes les dérivées de $\Delta_h(f)$ sont positives sur $]a, b-h[$, car

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]a, b-h[\quad \Delta_h(f)^{(k)}(x) = f^{(k)}(x+h) - f^{(k)}(x) \quad \text{or } x+h > x.$$

Donc $\Delta_h(f)$ est AM sur $]a, b-h[$ et, par récurrence immédiate, pour tout n, $\Delta_h^n(f)$ est AM sur $]a, b-nh[$ (propriété considérée comme triviale si cet intervalle est vide !). *A fortiori*

$$\boxed{\Delta_h^n(f) \text{ est positive pour tout } n.}$$

4) a) J'utilise la formule du binôme dans $\mathbb{R}$ et le développement en série entière de la fonction exponentielle : pour tout réel t,

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kt} (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{(kt)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} S_j t^j.$$

En effet je peux intervertir les deux sommes, par linéarité de la limite, puisqu'il s'agit de la somme d'un nombre **fini** de séries convergentes. Je retrouve ainsi le fait que ψ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (c'était sûr, par récurrence à partir du résultat sur les produits de Cauchy...). Et par unicité des coefficients de ce développement en série entière, j'en déduis que

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad S_j = \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!}.$$

Or par ailleurs $\psi(t) \underset{0}{\sim} t^n$, donc par unicité des coefficients du développement limité à l'ordre n de ψ en 0, j'ai

$$\boxed{\forall j \in \{0, \ldots, n-1\} \quad S_j = 0 \quad \text{et} \quad S_n = 1.}$$

b) Je suppose f TM sur $]a, b[$. Soient $x \in]a, b[$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés. Comme f est $\mathcal{C}^\infty$, je dispose de la formule de Taylor-Young à l'ordre n en x_0 :

$$f(x+t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} t^j + t^n \varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Pour $h > 0$ suffisamment petit, j'ai $x + nh \in]a, b[$ et d'après **2)**

$$\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + kh)$$

d'où, en utilisant $n + 1$ fois le DL ci-dessus :

$$\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} (kh)^j + h^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \varepsilon(kh).$$

La dernière somme tend vers 0 quand h tend vers 0 (somme finie) et je peux intervertir les deux premières sommes (finies également !) :

$$\Delta_h^n(f)(x) \underset{h\to 0}{=} \sum_{j=0}^{n} S_j h^j f^{(j)}(x) + o(h^n) \underset{h\to 0}{=} h^n f^{(n)}(x) + o(h^n)$$

d'après **a)**. Il en résulte que

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\Delta_h^n(f)(x)}{h^n}.$$

Comme f est TM par hypothèse, les $\Delta_h^n(f)(x)$ sont positifs et donc, par compatibilité de la limite avec la relation $\geq$, $f^{(n)}(x) \geq 0$, cela pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]a, b[$. Autrement dit

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est TM, alors elle est AM. C'est la réciproque du résultat du } \mathbf{3)}.}$$