D.M. 3

Exercice

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on pose :

$$u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}.$$

1) Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.

2) Étudier les variations de la fonction u_n.

Que peut-on conclure pour la convergence de $\sum u_n$?

La fonction somme S de la série $\sum u_n$ est-elle continue ?

3) Montrer que S est dérivable en tout point $x \neq 0$.

4) N étant un entier ≥ 1, on pose $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n(x)$.

a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha \geq 0$ (dépendant de N) tel que, pour $0 < |x| < \alpha$, on ait

$$\frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

b) En déduire la limite en 0 de $\dfrac{S(x)}{x}$.

c) S est-elle dérivable en 0 ?

Problème A : plusieurs expressions de la constante d'Euler

1) Retrouver rapidement l'existence de

$$\gamma = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \ln p\right)$$

et montrer que γ peut également s'écrire :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

2) Soit $x \in [0,1]$; établir :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0,x] \quad \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k t^k + \frac{(-1)^{p+1}t^{p+1}}{1+t}.$$

En déduire :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}.$$

3) Montrer que γ peut encore s'écrire :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}\right).$$

La fin du problème s'attache à intervertir les deux sommations ci-dessus.

4) Pour $x \in [1, +\infty[$, on note $E(x)$ la partie entière de x et l'on pose

$$\forall k \geq 2 \quad f_k(x) = \frac{(-1)^k}{k} \sum_{n=1}^{E(x)} \frac{1}{n^k}.$$

a) Montrer que la fonction $\zeta : \alpha \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est définie et décroissante sur $]1, +\infty[$.

Montrer que, pour x fixé dans $[1, +\infty[$, la suite $(|f_k(x)|)_{k \geq 2}$ converge vers 0 en décroissant.

b) En déduire que la série de fonctions $\sum_{k \geq 2} f_k$ est uniformément convergente sur $[1, +\infty[$.

5) Montrer que :

$$\gamma = \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} f_k(x).$$

En déduire enfin que :

$$\gamma = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k).$$

Problème B – Fonctions absolument monotones

Soient a et b réels tels que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une fonction de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$. f est dite *absolument monotone* (en abrégé AM) *sur* $]a, b[$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]a, b[\quad f^{(n)}(x) \geq 0.$$

Partie I

1) Soient f et g deux fonction AM définies sur $]a, b[$. Montrer que $f + g$ et fg sont AM.

2) Si f est une fonction AM sur $]a, b[$, montrer que e^f l'est aussi.

3) *Exemples*

a) Montrer que $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ est AM sur $]0, 1[$.

b) Montrer que la fonction arcsin est AM sur $]0, 1[$.

c) Montrer que la fonction tan est AM sur $]0, \pi/2[$.

4) On suppose dans cette question que $a \in \mathbb{R}$ et que f est AM sur $]a, b[$.

a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = \lim_{a^+} f$. On prolonge f en posant $f(a) = \lambda$.

Montrer que f est dérivable à droite en a et que f' est continue à droite en a.

b) Plus généralement, montrer que f est indéfiniment dérivable à droite en a avec des dérivées positives ou nulles. Le même phénomène se produit-il en b ?

Partie II

On suppose dans cette partie que : $-\infty < a < 0 < b \leq +\infty$.

On utilisera librement la formule de Taylor avec reste intégral.

1) Soit une fonction f AM sur $]a,b[$ et : $R_n(f,x) = f(x) - f(0) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$.

a) Prouver que, pour n fixé, la fonction $x \mapsto \dfrac{R_n(f,x)}{x^n}$ est croissante sur $]0,b[$ et possède une limite nulle en 0^+.

b) Montrer que $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$ converge pour $x \in [0,b[$. Soit $g(x)$ sa somme, montrer que $g \leq f$.

c) Déduire des questions précédentes que $g = f$ sur $[0,b[$. On pourra montrer que, pour $0 < x < y < b$,

$$0 \leq R_n(f,x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y).$$

d) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

2) Suivant les indications de la question **I-4)**, on prolonge f en a. Montrer que, pour tout x de $[a,b[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \cdot \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

3) Montrer que si f s'annule en $x_0 \in]a,b[$, alors f est nulle. Donner l'ensemble des fonctions f AM sur $]a,b[$ telles que, pour un $p \in \mathbb{N}$ fixé, $f^{(p)}$ possède un zéro dans $]a,b[$.

Partie III

On suppose dans cette partie que $-\infty < a < b < +\infty$.

Étant donné $h \in \mathbb{R}^{+*}$, on définit sur l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle les applications T_h, Δ_h et I par :

$$T_h(f)(x) = f(x+h), \quad \Delta_h(f)(x) = f(x+h) - f(x), \quad I(f)(x) = f(x).$$

Plus généralement on définit les opérateurs aux différences finies successifs :

$$\Delta_h^0 = I \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Delta_h^{n+1} = \Delta_h \circ \Delta_h^n.$$

1) On suppose que l'ensemble de définition de f est $]a,b[$. Quel est l'ensemble de définition de $\Delta_h^n(f)$?

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Delta_h^n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh)$.

3) On suppose f définie et AM sur $]a,b[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_h^n(f) \geq 0$.
On pourra poser $X(h) = \Delta_h^{n+1}(f)(x)$ et exprimer $X'(h)$ en fonction de $\Delta_h^n(f')(x+h)$.

4) On considère les fonctions f *totalement monotones* (TM) c'est-à-dire définies sur $]a,b[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et telles que :

$$f \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall h \in]0,(b-a)/n[\quad \forall x \in]a, b-nh[\quad \Delta_h^n(f)(x) \geq 0.$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_j = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^j}{j!}$ pour $j \in \mathbb{N}$ et $\psi(t) = \left(e^t - 1\right)^n$.

Déduire du calcul des dérivées successives de ψ en 0 que S_j vaut 0 si $j < n$ et que S_n vaut 1.

b) Montrer que toute fonction TM est AM.