Problème A : accélération de convergence

1) En écrivant $1 = \dfrac{1}{k}(n+k-n)$, j'obtiens bien la relation fournie par l'énoncé ; elle me permet d'écrire, pour $p \in \mathbb{N}^*$, compte tenu de l'hécatombe :

$$S_p(k) = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{p}\left[\frac{1}{n(n+1)...(n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)...(n+k)}\right] = \frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(p+1)...(p+k)}\right).$$

Il est clair que le dernier terme tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini. En conclusion :

$$\boxed{S_p(k) = \frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(p+1)...(p+k)}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{p\to\infty} S_p(k) = \frac{1}{k.k!}.}$$

2) a) De $0 \leq 2n-1 \leq 2n$ et $n^3+n+2 \geq n^3 > 0$, je déduis :

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad a_n \leq \frac{2}{n^2}.}$$

De plus, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, j'ai : $\forall n \geq 2 \quad \dfrac{1}{n^2} \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$,

d'où en sommant, puis en passant à la limite :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leq \int_{p}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{p}.$$

Finalement :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n \leq \frac{2}{p}.}$$

Ce reste étant précisément l'erreur commise si l'on choisit σ_p comme valeur approchée de σ :

$$\boxed{\text{Il suffit de choisir } p = 20\,000 \text{ pour que } \sigma_p \text{ approche } \sigma \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}}$$

b) Remarquant que $a_n = \dfrac{2n-1}{(n+1)(n^2-n+2)}$, j'obtiens successivement :

$$n(n+1)a_n = n\frac{2n-1}{n^2-n+2} \sim 2$$

$$n(n+1)(n+2)\left[a_n - \frac{2}{n(n+1)}\right] = \frac{(n+2)(n-4)}{n^2-n+2} \sim 1$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)\left[a_n - \frac{2}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right] = -\frac{(n+3)(n+10)}{n^2-n+2} \sim -1$$

En conclusion :

$$\boxed{C_1 = 2,\ C_2 = 1,\ C_3 = -1.}$$

c) Une dernière réduction au même dénominateur me donne :

$$\boxed{\varepsilon_n = \frac{-14}{n(n+3)(n^3+n+2)}.}$$

Il en résulte immédiatement :

$$\boxed{|\varepsilon_n| \leq \frac{14}{n^5}.}$$

3) a) Comme au **2)a)**, j'obtiens :

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n^5} \leq \int_{p}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^5} = \frac{1}{4p^4}.$$

Or, pour p entier, $\dfrac{14}{4p^4} \leq 2\cdot 10^{-4} \Leftrightarrow p \geq 12$:

$$\boxed{\text{Pour } p = 12, \text{ j'ai } \sum_{n=p+1}^{\infty}|\varepsilon_n| \leq 2\cdot 10^{-4}.}$$

b) La calculatrice fournit :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{12} \varepsilon_n \approx -1,02819083534}$$

c) D'après **1)** et le choix de $C_1,\ C_2,\ C_3$, j'ai :

$$\sigma = 2 \cdot \frac{1}{1 \cdot 1!} + \frac{1}{2 \cdot 2!} - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n.$$

En remplaçant cette dernière somme de série par la valeur approchée calculée à la question précédente, j'obtiens $1,1662536091$ qui est donc une valeur approchée de σ à $2 \cdot 10^{-4}$ près, par excès car les ε_n sont négatifs ; il n'y a plus qu'à retrancher 10^{-4} :

$$\boxed{1,1661536091 \text{ est une valeur approchée de } \sigma \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}}$$

Problème B : étude d'un procédé de sommation

Partie I : deux exemples

1) Ici a_n ne dépend pas de n :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha.$$

Or d'après la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^* = \alpha.}$$

Comme α est non nul, les deux séries divergent grossièrement (puisque leur terme général ne converge pas vers 0 !).

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} a_n^* \text{ divergent grossièrement.}}$$

2) a) À nouveau j'applique la formule du binôme (1 et z commutent !)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = \frac{1}{2^n} (1+z)^n,$$

soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^* = \left(\frac{1+z}{2}\right)^n.}$$

b) (i) Ici $|z| < 1$, donc, d'après le cours sur les séries géométriques :

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n \text{ converge et sa somme est } A(z) = \frac{1}{1-z}.}$$

(ii) De plus, grâce à l'inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{1+z}{2}\right| \leq \frac{1+|z|}{2} < 1 \quad \text{car } |z| < 1.$$

Donc $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* = \dfrac{1}{1 - \frac{1+z}{2}} = \dfrac{2}{1-z}$. Finalement,

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n^* \text{ converge et sa somme est } 2A(z).}$$

c) (i) Ici $|z| \geq 1$, donc la suite (a_n) ne converge pas vers 0 :

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} a_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

(ii) Pour $z = -2$, $a_n^* = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ et donc

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} a_n^* \text{ est une série géométrique convergente.}}$$

(iii) Soit maintenant $z = e^{i\theta}$. Alors

$$\frac{1+z}{2} = e^{i\theta/2} \cdot \frac{e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}}{2} = e^{i\theta/2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}.$$

Ainsi, cos étant une fonction paire,

$$\left|\frac{1+z}{2}\right| = \cos\frac{|\theta|}{2} \in \left]0,1\right[\quad \text{car } 0 < \frac{|\theta|}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ par hypothèse.}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} a_n^* \text{ converge.}}$$

De plus, le calcul de somme du **b)** reste valable :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* = \frac{1}{1 - \frac{1+z}{2}} = \frac{2}{1-z} = \frac{2e^{-i\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = \frac{2e^{-i\theta/2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{i\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Soit

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* = 1 + i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.}$$

Partie II : étude du procédé de sommation

1) a) (i) k étant fixé, j'ai

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

car chacun des k facteurs du numérateur est équivalent à n lorsque $n \to \infty$.

$$\boxed{\binom{n}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}.}$$

(ii) Donc $\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k} = \dfrac{1}{k!} \cdot \dfrac{n^k}{2^n}$; d'où, selon les croissances comparées des fonctions puissances et exponentielles (k est fixé et $2 > 1$) :

$$\boxed{\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

b) D'après **a)**, pour chaque valeur de k fixée dans $[\![0, n]\!]$, a_k étant une constante, j'ai $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}a_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. La suite de terme général $S_q(n,a)$ apparaît donc comme la somme de $q+1$ suites qui convergent toutes vers 0 (avec q fixé). Par conséquent, selon les théorèmes opératoires classiques,

$$\boxed{S_q(n,a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

c) Tout cela fait penser à Cesàro… Soit $\varepsilon > 0$; puisque (a_n) converge vers 0, je dispose de $q \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq q \quad |a_k| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ et j'écris, grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \geq q \quad |a_n^*| \leq |S_q(n,a)| + \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=q+1}^{n} \binom{n}{k} |a_k| \leq |S_q(n,a)| + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{car } \sum_{k=q+1}^{n} \binom{n}{k} \leq 2^n \text{ (cf. } \mathbf{I-1)a}\text{))}.$$

Et d'après **b)**, q étant ainsi fixé, je dispose de $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1 \quad |S_q(n,a)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Alors, en posant $n_0 = \max(q, n_1)$, j'ai

$$\forall n \geq n_0 \quad |a_n^*| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, par définition de la limite,

$$\boxed{a_n^* \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } n \text{ tend vers } \infty.}$$

d) Toujours d'après **I - 1)a)**, je peux écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\ell = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ell \quad \text{d'où} \quad a_n^* - \ell = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a_n - \ell)$$

et comme par hypothèse la suite $(a_n - \ell)$ converge vers 0, le **c)** s'applique et montre que $(a_n^* - \ell)$ converge également vers 0. Autrement dit

$$\boxed{a_n^* \text{ tend vers } \ell \text{ lorsque } n \text{ tend vers } \infty.}$$

e) On vient de voir que la convergence de (a_n) entraîne celle de (a_n^*), mais le **I - 2)c)(ii)** fournit un contre-exemple de la réciproque !

2) a) Je note que

$$\forall n \geq 1 \quad U_n = 2^n \left(T_{n-1} + a_n^*\right) = 2U_{n-1} + 2^n a_n^*.$$

Il vient successivement, en regroupant pour U_2 et U_3 les termes à partir des indices les plus élevés :

$$\begin{aligned}
&U_0 = a_0^* = a_0 = S_0\\
&U_1 = 2S_0 + (a_0 + a_1) = 2S_0 + S_1\\
&U_2 = 2\left(2S_0 + S_1\right) + (a_0 + 2a_1 + a_2) = 3S_0 + 3S_1 + S_2\\
&U_3 = 2\left(3S_0 + 3S_1 + S_2\right) + (a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3) = 4S_0 + 6S_1 + 4S_2 + S_3
\end{aligned}$$

b) (i) On peut apparemment conjecturer

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n : U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k \quad \text{où} \quad \forall k \in [\![0, n]\!] \quad \lambda_{n,k} = \binom{n+1}{k+1}.}$$

(ii) Montrons par récurrence sur n que la propriété $\mathcal{P}_n$ ci-dessus est vraie pour tout n.

Initialisation : on a vu au **a)** que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in [\![0, 3]\!]$.

Hypothèse de récurrence : je considère $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}_{n-1}$ soit vraie et je reprends la remarque ci-dessus, avec l'indication de l'énoncé.

$$\begin{aligned}
U_n &= 2\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (S_k - S_{k-1})\\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} S_k \text{ (en réindexant la dernière somme, avec } S_{-1} = 0\text{)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}\right] S_k + S_n \text{ (en mettant de côté le dernier terme)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} S_k + S_n \text{ (d'après la relation du triangle de Pascal)}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k \text{ (car } \binom{n+1}{n+1} = 1 \text{ !)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}_n$ est vraie, ce qui achève cette démonstration par récurrence.

c) On suppose ici que $\sum a_n$ converge, c'est-à-dire (en notant S sa somme), que la suite des sommes partielles (S_n) converge vers S. Si je pose alors
$$A_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbb{N}^* \quad A_j = S_{j-1},$$
la suite (A_n) converge vers S comme (S_n), or avec les notations précédentes,
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad T_n = \frac{1}{2^n} U_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k = 2 \cdot \left[\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} A_j \right].$$
Or dans ce dernier crochet, je reconnais l'expression de A^*_{n+1}, construite à partir de la suite (A_n) par le procédé "habituel". Or (A_n) converge vers S, donc le **1)d)** montre que (A^*_n) également, donc la suite (T_n) converge vers $2S$. Mais cette suite n'est autre que la suite des sommes partielles de la série $\sum a^*_n$!! En conclusion,
$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a^*_n \text{ converge et sa somme vaut } 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n.}$$

d) On vient de voir que la convergence de $\sum a_n$ entraîne celle de $\sum a^*_n$, mais le **I - 2)c)(ii)** fournit à nouveau un contre-exemple de la réciproque !

Problème C : inégalités de Hölder et de Minkowski

1) Notons que, pour $(x, y) \in I^2$ et $t \in [0, 1]$, $(1-t)\,x + ty$ est élément du segment $[x, y]$ et donc de I (c'est la convexité de l'intervalle I !).

a) Suivant l'indication de l'énoncé, je considère f convexe et dérivable sur I, x, y dans I tels que $x < y$ et h tel que $0 < h \leq y - x$, de sorte que $t = \dfrac{h}{y-x} \in [0, 1]$. J'ai alors
$$(1-t)\,x + ty = x + t\,(y-x) = x + h \quad \text{et} \quad (1-t)\,f(x) + tf(y) = f(x) + h \cdot \frac{f(y) - f(x)}{y-x}$$
d'où, par définition de la convexité et en divisant par h qui est strictement positif :
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x}$$
Cela étant vrai pour tout h de $]0, y-x]$ et f étant dérivable en x, je peux passer à la limite lorsque h tend vers 0 et j'obtiens
$$\boxed{f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x}.}$$
De même avec $u = 1 - t$ qui est aussi dans $[0, 1]$ j'obtiens
$$(1-u)\,x + uy = tx + (1-t)\,y = y - h \quad \text{et} \quad tf(x) + (1-t)\,f(y) = f(y) - h \cdot \frac{f(y) - f(x)}{y-x}$$
d'où comme $-h < 0$
$$\frac{f(y-h) - f(y)}{-h} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y-x}$$
et de même à la limite lorsque h tend vers 0
$$\boxed{f'(y) \geq \frac{f(y) - f(x)}{y-x}.}$$
Par transitivité de la relation $\leq$, j'en déduis $f'(x) \leq f'(y)$, cela pour tout couple (x, y) de I^2 tel que $x < y$, autrement dit
$$\boxed{f' \text{ est croissante sur } I.}$$

b) Soit maintenant f dérivable sur I telle que f' soit croissante. Je fixe $t \in [0, 1]$, $y \in I$ et je considère la fonction
$$\phi : x \mapsto (1-t)\,f(x) + tf(y) - f\big((1-t)\,x + ty\big).$$
ϕ est définie et dérivable sur I en vertu des théorèmes opératoires classiques ($(1-t)\,x + ty$ étant toujours dans I d'après la remarque préliminaire). De plus
$$\forall x \in I \quad \phi'(x) = (1-t)\left[f'(x) - f'\big(x + t\,(y-x)\big)\right].$$

t étant positif, j'ai $x + t(y - x) \geq x$ lorsque $x < y$ et $x + t(y - x) \leq x$ lorsque $x > y$. f' étant croissante et $1 - t$ étant positif, il en résulte que $\phi'(x) \leq 0$ lorsque $x < y$ et $\phi'(x) \geq 0$ lorsque $x > y$. Donc ϕ atteint un minimum en y, or $\phi(y) = 0$. Finalement ϕ est à valeurs positives, ce qu'il fallait démontrer.

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } I.}$$

Notons que, pour f deux fois dérivable sur I, la condition "f' croissante" équivaut à "f'' positive".

2) a) Étant $\mathcal{C}^\infty$ avec une dérivée seconde positive, la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$. Soient x, y dans $\mathbb{R}^{+*}$, $u = \ln x$, $v = \ln y$. Comme $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ sont positifs et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, la fonction exp étant convexe, j'ai

$$\exp\left(\frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v\right) \leq \frac{1}{p}\exp u + \frac{1}{q}\exp v,$$

autrement dit,

$$\boxed{x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.}$$

Soient alors

$$\lambda = \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{-1} \quad \text{et} \quad \mu = \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{-1}.$$

J'applique l'inégalité précédente en remplaçant successivement (x, y) par $\left(\lambda a_k^p, \mu b_k^q\right)$, pour k décrivant $\mathbb{N}_n$, puis j'ajoute les inégalités obtenues :

$$\lambda^{1/p}\mu^{1/q}\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \frac{\lambda}{p}\sum_{k=1}^n a_k^p + \frac{\mu}{q}\sum_{k=1}^n b_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{par choix de } \lambda, \mu.$$

L'inégalité de Hölder en résulte.

b) Pour $p = 1$, l'inégalité de Minkowski est banale ; pour $p > 1$, je pose $q = \frac{p}{p-1}$, ainsi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; j'applique deux fois l'inégalité de Hölder précédente en remplaçant (a_k, b_k) par $\left(a_k, (a_k + b_k)^{p-1}\right)$, puis par $\left(b_k, (a_k + b_k)^{p-1}\right)$.

Il vient alors, du fait que $(p - 1)q = p$,

$$\sum_{k=1}^n a_k (a_k + b_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{1/q}$$

$$\sum_{k=1}^n b_k (a_k + b_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{1/q} \quad ;$$

d'où, en sommant

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \leq \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{1/q}.$$

Comme $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, l'inégalité de Minkowski en résulte.

3) a) Seule l'inégalité triangulaire pose problème. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans E :

$$N_p(x + y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|)^p\right)^{1/p}.$$

Il reste à appliquer l'inégalité de Minkowski, mais les $|x_k|, |y_k|$ ne sont pas nécessairement dans $\mathbb{R}^{+*}$; il suffit de les remplacer par $|x_k| + \varepsilon, |y_k| + \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$, d'appliquer l'inégalité de Minkowski puis de faire tendre ε vers 0 : les fonctions qui interviennent étant continues, j'obtiens

$$N_p(x + y) \leq N_p(x) + N_p(y).$$

Finalement,

$$\boxed{N_p \text{ est une norme sur } E.}$$

b) Comme $q/p > 1$, l'application $\varphi : t \mapsto t^{q/p}$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$, puisque sa dérivée est croissante.

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété classiqueque, si $y_1, \ldots, y_n$ sont dans $\mathbb{R}^+$:

$$\mathcal{P}_n : \forall (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \quad \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(a_k).$$

$\mathcal{P}_1$ est banale ; $\mathcal{P}_2$ découle de la définition de la convexité (avec $t = 1/2$).

Je suppose alors $n \geq 3$ tel que $\mathcal{P}_{n-1}$ soit vraie, je considère $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ et je remarque que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = (1-t)\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) + t a_n \quad \text{avec} \quad t = \frac{1}{n}.$$

La convexité de φ donne alors

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \leq (1-t)\,\varphi\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) + t\varphi(a_n)$$

d'où grâce à l'hypothèse de récurrence, puisque $1 - t \geq 0$

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \leq (1-t)\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(a_k) + t\varphi(a_n)$$

qui n'est autre que l'inégalité souhaitée, puisque $(1-t)\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n}$!

Cela achève la démonstration par récurrence.

J'en déduis, pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vecteur de E, en posant $a_k = |x_k|^p$,

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(|x_k|^p)\ ,$$

soit

$$\frac{1}{n^{q/p}} N_p(x)^q \leq \frac{1}{n} N_q(x)^q.$$

D'où, en élevant les deux membres à la puissance $1/q$:

$$\boxed{N_p(x) \leq n^{1/p-1/q} \cdot N_q(x).}$$

Pour $n = 1$, l'inégalité proposée est triviale ; pour $n = 2$, une étude de fonction permettrait de conclure ; je peux aussi appliquer l'inégalité triangulaire pour la norme N_r dans $\mathbb{R}^2$ aux vecteurs $(a_1, 0)$ et $(0, a_2)$:

$$(a_1^r + a_2^r)^{1/r} \leq (a_1^r)^{1/r} + (a_2^r)^{1/r} = a_1 + a_2,$$

d'où le résultat en élevant le tout à la puissance r. Ensuite la récurrence est immédiate, le passage de n à $n + 1$ s'effectuant à l'aide du cas $n = 2$ et de l'hypothèse de récurrence.

En appliquant l'inégalité ainsi démontrée avec $a_k = |x_k|^p$ et $r = q/p$ (qui est bien supérieur à 1 par hypothèse), j'obtiens

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{q/p},$$

d'où, en élevant à la puissance $1/q$:

$$\boxed{N_q(x) \leq N_p(x), \text{ cela pour tout } x \text{ de } E.}$$

c) Soit $x \in E$. Par définition de N_∞, il vient facilement : $N_\infty(x)^p \leq N_p(x)^p \leq n \cdot N_\infty(x)^p$, d'où, en élevant à la puissance $1/p$:

$$\boxed{N_\infty(x) \leq N_p(x) \leq n^{1/p} \cdot N_\infty(x), \text{ cela pour tout } x \text{ de } E.}$$

Enfin, n étant fixé, lorsque p tend vers l'infini, $n^{1/p} = \exp\left(\dfrac{1}{p}\ln n\right)$ tend vers 1, d'où, grâce au théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{p \to +\infty} N_p(x) = N_\infty(x).}$$

N.B. On peut voir là l'origine de la dénomination N_∞ !