D.M. 2

Le sujet se compose de 3 problèmes indépendants.

Problème A : accélération de convergence

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)}\right],$$

calculer, pour $p \in \mathbb{N}^*$, la somme :

$$S_p(k) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} \quad \text{et} \quad \lim_{p\to\infty} S_p(k).$$

2) On se propose de calculer une valeur approchée de la somme σ de la série de terme général :

$$a_n = \frac{2n-1}{n^3+n+2}, \text{ pour } n \geq 1.$$

a) Montrer que l'on a

$$a_n \leq \frac{2}{n^2}$$

et, en utilisant une comparaison à une intégrale, donner un majorant du reste $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n$.

Quelle valeur de p suffit-il de choisir pour que $\sigma_p = \sum\limits_{n=1}^{p} a_n$ approche σ à 10^{-4} près ?

b) Pour réduire ce nombre de termes, on écrit :

$$a_n = \frac{C_1}{n(n+1)} + \frac{C_2}{n(n+1)(n+2)} + \frac{C_3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \varepsilon_n.$$

Calculer C_1, C_2, C_3 tels que :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \lim_{n\to\infty} \left[n(n+1)a_n\right] \\
C_2 &= \lim_{n\to\infty} \left[n(n+1)(n+2)\left(a_n - \frac{C_1}{n(n+1)}\right)\right] \\
C_3 &= \lim_{n\to\infty} \left[n(n+1)(n+2)(n+3)\left(a_n - \frac{C_1}{n(n+1)} - \frac{C_2}{n(n+1)(n+2)}\right)\right]
\end{aligned}$$

c) Donner, pour ces valeurs de C_1, C_2, C_3, l'expression de ε_n en fonction de n et prouver que :

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{14}{n^5}.$$

3) **a)** Calculer, comme au **2)a)**, une valeur de p pour avoir :

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} |\varepsilon_n| \leq 2.10^{-4}.$$

b) Pour cette valeur de p, calculer $\sum\limits_{n=1}^{p} \varepsilon_n$, avec la précision de la machine.

c) En déduire une valeur approchée de σ à 10^{-4} près.

Problème B : étude d'un procédé de sommation

Notations : pour tout entier naturel n, on note $n!$ la factorielle de n (avec la convention $0! = 1$), $[\![0, n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $0 \leq k \leq n$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ le nombre de parties ayant k éléments d'un ensemble à n éléments, pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Si n est un entier naturel non nul, on note σ_n la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ et l'on pose $\sigma_0 = 0$.

Toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ étant une suite complexe, si a est une telle suite, on utilise la notation usuelle $a\,(n) = a_n$.

À toute suite complexe a, on associe la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

L'objet du problème est de comparer les propriétés de la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n^*$ aux propriétés de la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n$.

Partie I : deux exemples

1) Cas d'une suite constante : soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$; on définit la suite a par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \alpha$.
Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$. La série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n$ (*resp.* $\sum\limits_{n \geq 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

2) Cas d'une suite géométrique : soit $z \in \mathbb{C}$; on définit la suite a par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = z^n$.

a) Exprimer a_n^* en fonction de z et de n.

b) On suppose que $|z| < 1$.

(i) Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $A\,(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(ii) Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de $A\,(z)$.

c) On suppose que $|z| \geq 1$.

(i) Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n$?

(ii) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n^*$ si $z = -2$?

(iii) On suppose que $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$.
Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n^*$ est convergente.

Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^*$.

Partie II : étude du procédé de sommation

Dans cette partie, pour simplifier, on suppose que la suite a est à valeurs réelles, la suite a^* étant toujours définie de la même façon.

1) Comparaison des convergences des deux suites

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un entier k **fixé**, $k \in [\![0, n]\!]$.

(i) Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(ii) En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Soient a une suite réelle et q un entier naturel **fixé**.

On considère, pour $n > q$, la somme $S_q(n, a) = \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$.

Quelle est la limite de $S_q(n, a)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

c) On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$; montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

d) On suppose que a_n tend vers ℓ (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

e) La convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle équivalente à la convergence de la suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$?

2) Comparaison des convergences des séries $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^*$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

a) Pour $n \in [\![0, 3]\!]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k, c'est-à-dire sous la forme $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k$.

b) On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in [\![0, n]\!]$:

$$(\mathcal{E}) \ U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

(i) À quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et de k) peut-on s'attendre compte tenu des résultats obtenus à la question précédente ?

(ii) Établir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur n (*on pourra remarquer que, pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = S_k - S_{k-1}$, *avec la convention* $S_{-1} = 0$).

c) On suppose que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

d) La convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^*$?

Problème C : inégalités de Hölder et Minkowski

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est dite *convexe sur* I si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in I^2 \quad \forall t \in [0,1] \quad f\big((1-t)\,x + ty\big) \leq (1-t)\,f(x) + tf(y).$$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

On se propose de montrer que f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.

a) Supposant que f est convexe, considérer x, y dans I tels que $x < y$ et comparer $f'(x)$ à $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ (on pourra poser $t = \dfrac{h}{y-x}$ pour $h > 0$ assez petit). Comparer de même $f'(y)$ à $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

En déduire que f' est croissante sur I.

b) Supposant que f' est croissante sur I, pour y fixé dans I et t fixé dans $[0,1]$, étudier le signe de la fonction $\phi : x \mapsto (1-t)\,f(x) + tf(y) - f\big((1-t)\,x + ty\big)$. En déduire que f est convexe sur I.

2) Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels strictement positifs.

a) Soient p, q deux réels supérieurs à 1 tels que : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. À l'aide de la convexité de la fonction exponentielle, établir

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2 \quad x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

En déduire l'*inégalité de Hölder* :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q}$$

(on pourra utiliser les couples $\left(\lambda.a_k^p, \mu.b_k^q\right)$*,* λ *et* μ *étant bien choisis).*

b) Pour p réel, $p \geq 1$, établir l'*inégalité de Minkowski* :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p}$$

(on pourra écrire $(a_k+b_k)^p = (a_k+b_k)^{p-1}\,a_k + (a_k+b_k)^{p-1}\,b_k$ *et utiliser le* **a)***).*

3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $E = \mathbb{K}^n$ et p réel, $p \geq 1$.

a) Montrer que l'application N_p qui à $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ associe $N_p(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur E.

b) Soit q réel tel que $1 \leq p < q$. En utilisant la convexité de $\varphi : t \mapsto t^{q/p}$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que

$$\forall x \in E \quad N_p(x) \leq n^{1/p - 1/q} \cdot N_q(x).$$

On commencera par établir par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (a_1, \ldots, a_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n \quad \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(a_k).$$

Montrer par récurrence que, si les a_k sont dans $\mathbb{R}^+$ et si r est un réel supérieur ou égal à 1, alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^r \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^r.$$

En déduire que : $\forall x \in E \quad N_q(x) \leq N_p(x)$.

c) N_∞ désigne la norme usuelle sur E définie par : $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in E \quad N_\infty(x) = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k|$.

Établir : $\forall x \in E \quad N_\infty(x) \leq N_p(x) \leq n^{1/p} \cdot N_\infty(x)$.

Que se passe-t-il lorsque p tend vers l'infini ?

⋆ ⋆
⋆