Matrices quasi-nilpotentes

A. Exemples

1) Le polynôme caractéristique de D est
$$\chi_D = X^2 + 1$$
Il n'a aucune racine réelle et le spectre de D sur $\mathbb{R}$ est vide. En particulier D n'a aucune valeur propre réelle non nulle et donc

$$\boxed{D \text{ est quasi-nilpotente en tant que matrice de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Le spectre sur $\mathbb{C}$ de D est $\{i, -i\}$ et contient au moins un élément non nul donc

$$\boxed{D \text{ n'est pas quasi-nilpotente en tant que matrice de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).}$$

2) Le polynôme caractéristique de B est
$$\chi_B = X^2 - 1 + 1 = X^2$$
Ainsi, le spectre complexe de B est $\{0\}$ et ne contient aucun élément non nul.

$$\boxed{B \text{ est quasi-nilpotente en tant que matrice de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).}$$

3) $S_n(\mathbb{K})$ est le noyau de l'application linéaire $M \mapsto M - {}^tM$, $A_n(\mathbb{K})$ est le noyau de l'application linéaire $M \mapsto M + {}^tM$.
Enfin $T_n^{++}(\mathbb{K})$ est non vide (il contient 0) et est stable par combinaisons linéaires. En conclusion

$$\boxed{S_n(\mathbb{K}),\ A_n(\mathbb{K}) \text{ et } T_n^{++}(\mathbb{K}) \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

Montrons que
$$S_n(\mathbb{K}) = \operatorname{Vect}\left((E_{i,j} + E_{j,i})_{1\le i<j\le n}, (E_{i,i})_{1\le i\le n}\right)$$

-L'inclusion réciproque est vraie car les $E_{i,j} + E_{j,i}$ et $E_{i,i}$ sont symétriques et car $S_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace.

-Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. J'ai
$$S = \sum_{1\le i<j\le n} s_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) + \sum_{i=1}^{n} s_{i,i}E_{i,i} \in \operatorname{Vect}\big((E_{i,j} + E_{j,i})_{1\le i<j\le n}, (E_{i,i})_{1\le i\le n}\big)$$
J'ai donc aussi l'inclusion directe.

Je remarque ensuite que la famille $((E_{i,j} + E_{j,i})_{1\le i<j\le n}, (E_{i,i})_{1\le i\le n})$ est libre (je considère une combinaison linéaire nulle et j'ai immédiatement la nullité des coefficients). Il reste alors à compter le nombre des éléments de cette famille qui est une base de $S_n(\mathbb{K})$:
$$\dim S_n(\mathbb{K}) = \binom{n}{2} + n = \frac{n(n-1)}{2} + n$$
soit
$$\boxed{\dim S_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

4) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux et donc
$$\forall T \in T_n^{++}(\mathbb{K}),\ \operatorname{Sp}T = \{0\}.$$
Ceci montre que
$$\boxed{T_n^{++}(\mathbb{K}) \text{ est quasi-nilpotent dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$
Comme à la question précédente, je montrerais que
$$T_n^{++}(\mathbb{K}) = \operatorname{Vect}\left(E_{i,j}\ ,\ 1 \le i < j \le n\right)$$
La famille étant libre, c'est une base et
$$\boxed{\dim T_n^{++}(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.}$$

5) Notons que, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX$ est une matrice carrée d'ordre 1, que l'on identifie classiquement à un scalaire (son unique coefficient !). Par ailleurs, selon les propriétés de la transposition,

$$ {}^t\left({}^tXAX\right) = {}^tX{}^tAX = -{}^tXAX $$

d'où, ${}^t\left({}^tXAX\right)$ s'identifiant au même scalaire que ${}^tXAX$,

$$ \boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad {}^tXAX = 0.} $$

En particulier, si λ est une valeur propre de A et X un vecteur propre associé alors

$$ 0 = {}^tXAX = \lambda{}^tXX \quad \text{or, si} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{j'ai} \quad {}^tXX = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 $$

or $X \neq 0$ (vecteur propre) et les x_k sont réels, ${}^tXX > 0$ d'où $\lambda = 0$. 0 est donc la seule valeur propre réelle possible pour A. En conclusion

$$ \boxed{A_n(\mathbb{R}) \text{ est quasi-nilpotent dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).} $$

6) Je procède par l'absurde, en supposant que toute matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme PMP^{-1}, où $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M \in T_n^{++}(\mathbb{R})$. La matrice D étant antisymétrique d'ordre 2 et $n \geq 2$, je dispose de la matrice définie par blocs $A = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A_n(\mathbb{R})$. J'ai (déterminant par blocs)

$$ \chi_A = \left(X^2+1\right) X^{n-2} $$

et donc $-i$ et i sont des valeurs propres non nulles de A. Or deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique (immédiat) et les matrices de $T_n^{++}(\mathbb{R})$ ont 0 pour unique valeur propre, d'où une contradiction. En conclusion

$$ \boxed{\text{Il n'existe pas de matrice } P \text{ vérifiant la propriété de l'énoncé.}} $$

B – Cas réel

7) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. S est alors semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à une matrice diagonale (théorème spectral). Si 0 est sa seule valeur propre réelle, S est alors semblable à une matrice diagonale nulle et est donc nulle. Réciproquement, 0 est symétrique et quasi-nilpotente.

$$ \boxed{\text{La matrice nulle est la seule matrice symétrique quasi-nilpotente dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).} $$

La question **2** montre que le résultat est faux dans le cas complexe (S est une matrice symétrique quasi-nilpotente dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui n'est pas la matrice nulle).

8) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, quasi-nilpotent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après la question précédente $V \cap S_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ et donc V et $S_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe. Ainsi

$$ \boxed{\dim V \leq \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}.} $$

C – Lemme des colonnes

9) La seule matrice quasi-nilpotente de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est la matrice nulle (puisqu'une matrice de taille 1 a une unique valeur propre égale à son unique coefficient).

Le lemme des colonnes est donc vrai dans le cas $n = 1$.

10) K étant linéaire, $K(V')$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Un calcul de déterminant par blocs montre que si $M \in V'$ alors

$$ \chi_M = X \times \chi_{K(M)}. $$

Les valeurs propres non nulles de $M \in V'$ et celles de $K(M)$ sont donc les mêmes.

Or V est quasi-nilpotent, donc V' l'est également, d'où grâce à la remarque précédente

$$ \boxed{K(V') \text{ est quasi-nilpotent.}} $$

11) D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $K(V')$ (sous-espace de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$), je dispose d'un élément $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $C_j\left(K(V')\right) = \{0\}$. Or par hypothèse $C_j\left(V\right) \neq \{0\}$, je dispose donc d'une matrice M non nulle dans $C_j(V)$. Comme $j < n$, $M \in V'$ et donc $K(M) \in K(V')$. Comme $M \in C_j(V)$, j'ai aussi $K(M)$ qui a toutes ses colonnes nulles sauf peut-être la j-ième. Finalement, $K(M) \in C_j\left(K(V')\right)$ et donc $K(M) = 0$.

M a ainsi une unique colonne qui peut être non nulle (celle de numéro j) et seul le dernier coefficient de cette colonne peut être non nul. Comme $M \neq 0$, il existe $c \neq 0$ tel que $M = cE_{n,j}$. Enfin, V' est un sous-espace vectoriel donc $E_{n,j} = \dfrac{1}{c}M \in V'$, or $V' \subset V$ d'où finalement

$$\boxed{\text{Il existe } j \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } E_{n,j} \in V.}$$

12) u_σ transforme la base $(e_1, \ldots, e_n)$ en $\left(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\right)$ qui est aussi une base. Cette application linéaire est donc un automorphisme de $\mathbb{K}^n$.

u_σ^{-1} envoie $e_{\sigma(i)}$ sur e_i pour tout i et donc e_k sur $e_{\sigma^{-1}(k)}$ pour tout k. J'ai donc

$$\boxed{u_\sigma \in GL\left(\mathbb{K}^n\right) \text{ et } u_\sigma^{-1} = u_{\sigma^{-1}}.}$$

13) La colonne j de la matrice de u_σ dans la base canonique est la colonne $e_{\sigma(j)}$. Elle a tous ses coefficients nuls sauf celui de la ligne $\sigma(j)$. Son coefficient générique est donc $\delta_{i,\sigma(j)}$. J'ai ainsi

$$\boxed{M_{(e_1,\ldots,e_n)}(u_\sigma) = P_\sigma.}$$

J'en déduis que P_σ est inversible et que

$$\boxed{P_\sigma^{-1} = M_{(e_1,\ldots,e_n)}(u_\sigma^{-1}) = P_{\sigma^{-1}} = \left(\delta_{i,\sigma^{-1}(j)}\right)_{1 \leq i,j \leq n} = \left(\delta_{\sigma(i),j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}.}$$

14) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. P_σ étant la matrice de changement de base de (e_i) à $(e_{\sigma(i)})$, d'après la formule de changement de base,

$$P_\sigma^{-1} M P_\sigma = M_{(e_{\sigma(i)})}(g)$$

Le coefficient à l'intersection des colonne j et ligne i est la coordonnée sur $e_{\sigma(i)}$ de $g(e_{\sigma(j)})$. Or,

$$g(e_{\sigma(j)}) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,\sigma(j)} e_k = \sum_{l=1}^{n} m_{\sigma(l),\sigma(j)} e_{\sigma(l)}$$

Finalement,

$$\boxed{P_\sigma^{-1} M P_\sigma = \left(m_{\sigma(i),\sigma(j)}\right)_{1 \leq i,j \leq n}.}$$

15) V^σ est l'image de V par l'application linéaire $M \mapsto P_\sigma^{-1} M P$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$.

Deux matrices semblables ayant même spectre, le caractère quasi-nilpotent des éléments de V entraîne celui des éléments de V^σ :

$$\boxed{V^\sigma \text{ est un sous-espace quasi-nilpotent de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

Enfin, fixons $j \in [\![1, n]\!]$. Par hypothèse, je dispose de M non nulle dans $C_{\sigma(j)}(V)$. J'ai en particulier $m_{\ell,c}$ qui est nul si $c \neq \sigma(j)$ ce que l'on peut écrire $m_{\sigma(\ell),\sigma(c)} = 0$ si $\sigma(c) \neq \sigma(j)$ ou encore si $c \neq j$. La matrice $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ est donc dans $C_j(V^\sigma)$. Elle est non nulle car M l'est (et $A \mapsto P_\sigma^{-1} A P$ est un isomorphisme). J'ai montré que

$$\boxed{\forall j \in [\![1, n]\!] \quad C_j(V^\sigma) \neq \{0\}.}$$

16) V^σ et V ont les mêmes propriétés (sous-espaces quasi-nilpotents tels que pour tout j, $C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$). Pour tout σ, on peut donc appliquer la question **11** à V^σ et dire qu'il existe $k \in [|1, n-1|]$ tel que $E_{n,k} \in V_\sigma$ ou encore que $P_\sigma E_{n,k} P_\sigma^{-1} \in V$.
D'après la question **14**, pour tout choix de σ j'ai $P_\sigma^{-1} E_{u,v} P_\sigma = E_{\sigma^{-1}(u),\sigma^{-1}(v)}$ (en effet en notant $N = P_\sigma^{-1} E_{u,v} P_\sigma$, j'ai $N_{i,j}$ qui est égal au coefficient $(\sigma(i), \sigma(j))$ de $E_{u,v}$ et est nul sauf si $\sigma(i) = u$ et $\sigma(j) = v$).
En appliquant ceci avec σ^{-1}, j'ai donc $P_\sigma E_{n,k} P_\sigma^{-1} = E_{\sigma(n),\sigma(k)}$.

Fixons $j \in [\![1,n]\!]$. Appliquons le résultat précédent avec pour σ la bijection qui échange j et n en laissant les autres éléments invariants (c'est l'identité si $j = n$). Je trouve alors $k \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $E_{\sigma(n),\sigma(k)} = E_{j,\sigma(k)} \in V$. J'ai bien sûr $\sigma(k) \neq j$ car $k \neq n$ et σ est une bijection qui envoie déjà n sur j. J'ai ainsi prouvé que

$$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!] \quad \exists\, f(j) \neq j \quad E_{j,f(j)} \in V.}$$

Nous avons ainsi défini une application $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telle que, pour tout j, $f(j) \neq j$ (pas besoin d'axiome du choix : puisqu'il y a un ensemble fini non vide de valeurs qui conviennent, on peut choisir par exemple son plus petit élément pour définir précisément $f(j)\ldots$).

17) Posons $i_1 = 1$ et, pour tout $k \geq 2$, $i_k = f(i_{k-1})$. L'ensemble $\{i_k\ ,\ k \in \mathbb{N}^*\}$ est inclus dans $[\![1,n]\!]$ et donc fini. Or, $\mathbb{N}^*$ est infini. Il existe donc deux i_k égaux pour des valeurs de k différentes : $i_a = i_b$ avec $a < b$. En partant de i_a et en calculant les images itérées par f, je finis donc par retomber sur i_a. Je regarde la première fois où je retrouve i_a et ce n'est pas à la première itération car $f(j) \neq j$ pour tout j. Je trouve ainsi des indices $i_a, i_{a+1}, \ldots, i_{a+p-1}$ avec $p \geq 2$ deux à deux distincts, chacun étant l'image du précédent par f et avec $f(i_{a+p-1}) = i_a$.

En posant $j_1 = i_a$, $j_2 = i_{a+1}$, $\ldots$, $j_p = i_{a+p-1}$, j'ai obtenu des éléments deux à deux distincts tels que

$$\boxed{\forall k \in [\![1,p-1]\!] \quad f(j_k) = j_{k+1} \quad \text{et} \quad f(j_p) = j_1.}$$

18) J'applique le procédé décrit ci-dessus. Je gère un tableau `r` de booléens à $n+1$ cases numéroté à partir de 0 et dont la case 0 sera inutile (mais cela permet de respecter la notation Python). Initialement toutes les cases contiennent `False`.

Je pars de 1 et je mets `True` dans `r[1]` (l'indice 1 a été rencontré).

Ensuite je mets dans `i` les itérés successifs de 1, à l'aide d'une boucle `while` dont je sors dès que `f(i)` a déjà été rencontré (à chaque nouvelle valeur de `f(i)` rencontrée, je mets `True` dans `r[f(i)]`).

À la sortie de la boucle, `i` contient ainsi un indice qui a déjà été rencontré (parmi les itérés de 1), il suffit alors de repartir de cet indice, ses images successives par `f` redonneront `i` en un temps fini, par construction.

Je n'ai plus qu'à les stocker dans une liste jusqu'au "bouclage" et à renvoyer cette liste.

Les indices rencontrés dans ladite liste sont nécessairement distincts deux à deux (sinon je serais sorti de la boucle `while` avant de retrouver la valeur `i` !).

Pour le code Python, je suppose que l'entier `n` et la fonction `f` ont été définis !

```
r=[False]*(n+1)
i=1
r[1]=True

while not r[f(i)]:
    i=f(i)
    r[i]=True

S=[i]
k=f(i)
while k!=i:
    S.append(k)
    k=f(k)

print(S)
```

19) N est une matrice comportant p valeurs non nulles qui sont égales à 1. Il y a un coefficient 1 sur chaque ligne $j_1, \ldots, j_p$ et aussi un sur chaque colonne $f(j_1), \ldots, f(j_p) = j_2, \ldots, j_p, j_1$. On en déduit que le vecteur $\sum_{k=1}^{p} e_{j_k}$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre 1.

Ceci est contradictoire car $N \in V$ (comme somme d'éléments de V qui est un espace vectoriel) et ne devrait posséder aucune valeur propre non nulle. Cela clôt le raisonnement par l'absurde et la démonstration par récurrence !

$$\boxed{\text{Le lemme des colonnes est démontré.}}$$

D – Cas général

20) Considérons l'application $\Phi : M \in V \mapsto (K(M), L(M))$. Si $\Phi(M) = 0$ alors $L(M) = 0$ et $K(M) = 0$. Or $C_n(V) = 0$ et ces conditions impliquent donc que $M = 0$. Le noyau de Φ est égal à $\operatorname{Ker} K \cap \operatorname{Ker} L$ et Φ (qui est linéaire) est injective. J'ai ainsi

$$\dim V = \dim \operatorname{Im}\Phi = \dim \Phi(V)$$

Soit un supplémentaire W' de W dans V ; j'ai (par injectivité de Φ)

$$\Phi(V) = \Phi(W) \oplus \Phi(W')$$

J'ai $\Phi(W) = \{(K(M), L(M))\,,\ M \in W\} = \{(K(M), 0) \,/\, M \in W\}$ qui est isomorphe à $K(W)$ et donc de même dimension.

$W = \operatorname{Ker} L$ et, par le théorème du rang, W' est isomorphe à $L(V)$ qui est de dimension au plus $n-1$.

$\Phi(W')$ qui est isomorphe à W' est donc aussi de dimension au plus $n-1$. Finalement,

$$\boxed{\dim V = \dim \Phi(V) \leq \dim K(W) + (n-1).}$$

21) Soit $M \in W$; M s'écrit

$$M = \begin{bmatrix} K(M) & R(M) \\ 0 & a(M) \end{bmatrix}$$

et M est quasi-nilpotente (car dans V) ; or ses valeurs propres sont $a(M)$ et celles de $K(M)$. Ainsi $K(M)$ n'a pas de valeurs propres non nulle (et $a(M) = 0$). Cela prouve que $K(W)$ est quasi-nilpotent. D'après l'hypothèse de récurrence et la question précédente,

$$\dim K(M) \leq \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} \qquad \text{d'où} \quad \dim V \leq \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} + (n-1)$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\dim V \leq \frac{n\,(n-1)}{2}.}$$

22) D'après le lemme des colonnes, je dispose de j tel que $C_j(V) = \{0\}$. Considérons la permutation σ qui échange j et n. V^σ est alors isomorphe à V et est un espace vectoriel quasi-nilpotent auquel je peux appliquer le résultat précédent. J'ai donc

$$\boxed{\dim V = \dim V^\sigma \leq \frac{n(n-1)}{2}.}$$