D.M. 1

Matrices quasi-nilpotentes

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Étant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour i, j dans $[\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant exactement un coefficient non nul, situé en position (i, j) et de valeur 1. La transposée d'une matrice M sera notée ${}^tM$.

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **triangulaire supérieure stricte** lorsqu'elle est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous nuls.
On note $S_n(\mathbb{K})$, $A_n(\mathbb{K})$ et $T_n^{++}(\mathbb{K})$ les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitués respectivement des matrices symétriques, antisymétriques et triangulaires supérieures strictes.
On rappelle la notation du symbole de Kronecker : pour x et y deux entiers,

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Définition 1 *Étant donné un entier naturel non nul n, un sous-espace vectoriel V de $M_n(\mathbb{K})$, et un élément j de $[\![1, n]\!]$, on note $C_j(V)$ l'ensemble des matrices de V dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception éventuelle de la j-ième.*

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$, on notera $K(M) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, $R(M) \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$, $L(M) \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $a(M) \in \mathbb{K}$ les éléments de la décomposition de M en blocs suivante :

$$M = \begin{bmatrix} K(M) & R(M) \\ L(M) & a(M) \end{bmatrix} \tag{1}$$

On a en particulier défini des fonctions $K : V \to \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $L : V \to \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$, évidemment linéaires.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λ est **une valeur propre de M dans** $\mathbb{K}$ lorsqu'il existe un vecteur colonne **non nul** $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = \lambda X$, c'est-à-dire lorsque $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

L'ensemble des valeurs propres de M dans $\mathbb{K}$ est **le spectre de M dans** $\mathbb{K}$, noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}} M$.

Les valeurs propres de M dans $\mathbb{K}$ sont ainsi les racines du polynôme de $\mathbb{K}[X]$ associé à la fonction $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - M)$, polynôme appelé **polynôme caractéristique de** M et noté χ_M.

Objectifs

Définition 2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est* ***quasi-nilpotente*** *lorsqu'elle ne possède aucune valeur propre non nulle dans $\mathbb{K}$. Une partie V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite* ***quasi-nilpotente*** *lorsque tous ses éléments sont quasi-nilpotents.*

On se propose d'étudier les sous-espaces vectoriels quasi-nilpotents de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, le résultat principal que nous souhaitons établir s'énonce comme suit.

Théorème (Dimension des espaces quasi-nilpotents) *Pour tout sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a*

$$\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2} \tag{QN}$$

La clé pour démontrer ce résultat réside dans le lemme suivant, démontré dans la partie **C**.

Lemme (Lemme des colonnes) *Pour tout sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un élément j de $[\![1, n]\!]$ tel que $C_j(V) = \{0\}$.*

A – Exemples

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que la matrice $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est quasi-nilpotente, vue comme matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Est-elle quasi-nilpotente, vue comme matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

2) Montrer que la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$ est quasi-nilpotente, vue comme matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

3) Montrer que $S_n(\mathbb{K})$, $A_n(\mathbb{K})$ et $T_n^{++}(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que la dimension de $S_n(\mathbb{K})$ est $n(n+1)/2$.

4) Montrer que $T_n^{++}(\mathbb{K})$ est quasi-nilpotent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Vérifier que

$$\dim T_n^{++}(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

5) Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = 0$.
En déduire que $A_n(\mathbb{R})$ est quasi-nilpotent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6) Montrer qu'il n'existe pas de matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A_n(\mathbb{R}) = \left\{PMP^{-1},\ M \in T_n^{++}(\mathbb{R})\right\}$$

Indication : on pourra commencer par étudier le cas $n = 2$, en utilisant par exemple la matrice D introduite à la question **1.**

B – Cas réel

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

7) Déterminer l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ qui sont quasi-nilpotentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *(les 3/2 pourront admettre que toute matrice de $S_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice diagonale).*
Le résultat obtenu subsiste-t-il si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?

8) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, quasi-nilpotent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que

$$\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

C – Lemme des colonnes

On se propose ici de démontrer le lemme des colonnes par récurrence sur l'entier n.

9) Justifier que le lemme des colonnes est vrai dans le cas $n = 1$.

Dans la suite, on fixe un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose le lemme des colonnes vrai pour l'entier $n-1$. On se donne un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On raisonne par l'absurde en supposant que $C_j(V) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.
On introduit le sous-ensemble V' de V constitué de ses matrices de dernière colonne nulle.
Toute matrice M de V' s'écrit donc par blocs comme suit

$$M = \begin{bmatrix} K(M) & 0 \\ L(M) & 0 \end{bmatrix}$$

10) Montrer que l'ensemble $K(V') = \{K(M),\ M \in V'\}$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

11) En déduire qu'il existe un entier $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $E_{n,j} \in V$.

Soit σ une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans lui même. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On considère l'application linéaire u_σ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ définie sur la base canonique par

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,,\ u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

On considère la matrice P_σ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

12) Vérifier que u_σ est inversible et préciser son inverse.

13) Vérifier que P_σ est la matrice de u_σ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Montrer que P_σ est inversible et préciser les coefficients de son inverse.

14) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, préciser les coefficients de $P_\sigma^{-1}MP_\sigma$ en fonction de ceux de M et de σ.
On pourra utiliser un changement de base.

15) Montrer que l'ensemble

$$V^\sigma = \left\{P_\sigma^{-1}MP_\sigma\ ,\ M \in V\right\}$$

est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

16) En déduire que, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on peut choisir un $f(j) \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}$ tel que $E_{j,f(j)} \in V$. On obtient ainsi une fonction

$$f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]\,.$$

17) En considérant les images successives de 1, montrer qu'il existe une suite finie $(j_1,\dots,j_p)$ d'éléments deux à deux distincts de $[\![1,n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ f(j_k) = j_{k+1} \quad \text{et} \quad f(j_p) = j_1.$$

18) Écrire un algorithme qui permet de construire une telle suite connaissant les valeurs prises par f.

19) Démontrer que 1 est valeur propre de la matrice $N = \sum\limits_{k=1}^{p} E_{j_k,f(j_k)}$ et conclure.

D – Cas général

On va ici prouver l'inégalité (QN) par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivialement vrai. On fixe donc un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose l'inégalité (QN) établie au rang $n-1$. Soit V un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $M_n(\mathbb{K})$.

On rappelle qu'on peut écrire toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et en particulier de V, sous la forme (1) et qu'en particulier, les applications $K : V \to \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $L : V \to \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ sont linéaires. On introduit le sous-espace vectoriel

$$W = \{M \in V \mid L(M) = 0\}$$

Jusqu'à la question **21** incluse, on suppose que $C_n(V) = \{0\}$.

20) Montrer que $\dim V \leq \dim K(W) + (n-1)$.

21) En déduire que $\dim V \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$.

On ne suppose plus désormais que $C_n(V) = \{0\}$.

22) Démontrer que $\dim V \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$.