Problème A

A – Préliminaire

1) Sur $]-1,1[$, je dispose du développement en série entière usuel

$$(1+t)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$$

où

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad a_k = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} = \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{1.3.\cdots.(2k-1)}{k!} = \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{(2k)!}{2^k.(k!)^2}$$

en multipliant numérateur et dénominateur par $2.\cdots.(2k) = 2^k.k!$

D'où en remplaçant t par $-x$, le terme pour $k=0$ étant le bon,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k.}$$

B – Identité de Karamata

2) Soient $p \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$; j'ai $x^{p+1} \in]-1,1[$ et la factorisation classique :

$$1 - x^{p+1} = (1-x) \sum_{k=0}^{p} x^k$$

d'où en simplifiant

$$\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^{p+1}}} \sqrt{1-x^{p+1}} f\left(x^{p+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{p} x^k}} \sqrt{1-x^{p+1}} f\left(x^{p+1}\right).$$

Or, j'ai grâce à l'hypothèse, par composition de limites, p étant fixé,

$$\sqrt{1-x^{p+1}} f\left(x^{p+1}\right) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}$$

d'où

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{(p+1)k} = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}.}$$

3) Soient $p \in \mathbb{N}$ et $f_p : t \mapsto \dfrac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}$; f_p est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, intégrable sur $]0,1]$ par comparaison à une intégrale de Riemann, car

$$f_p(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}} \quad \text{et} \quad 1/2 < 1.$$

De plus

$$\forall t \geq 1 \quad 0 \leq f_p(t) = e^{-t} \frac{e^{-pt}}{\sqrt{t}} \leq e^{-t}$$

et $t \mapsto e^{-t}$ est classiquement intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car $-1 < 0$), donc sur $[1,+\infty[$; par conséquent f_p est aussi intégrable sur $[1,+\infty[$, donc finalement sur $\mathbb{R}^{+*}$. Pour le calcul, j'utilise le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = (p+1)t$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u/(p+1)}} \frac{1}{p+1} \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{p+1}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u.$$

Ainsi, grâce au résultat fourni dans l'énoncé ($\Gamma(1/2)\ldots$),

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}.}$$

En conclusion, grâce au **2)**,

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t.}$$

4) Le résultat précéent n'est autre que la formule souhaitée, dans le cas particulier $Q = X^p$; comme il est vrai pour tout p de $\mathbb{N}$, par linéarité de la limite d'une part et de l'intégrale d'autre part, il en résulte

$$\boxed{\text{Pour tout } Q \text{ de } \mathbb{R}[X],\ \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k Q\left(x^k\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} Q\left(e^{-t}\right)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.}$$

5) Par définition de h, j'ai

$$\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h\left(e^{-t}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{si } t \in \left]0,1\right] \quad \text{et} \quad \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h\left(e^{-t}\right) = 0 \quad \text{si } t > 1.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ (convergente car $1/2 < 1$!) se calcule à l'aide d'une primitive :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_0^1 = 2.$$

En conclusion,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h\left(e^{-t}\right) \mathrm{d}t \text{ converge et vaut } 2.}$$

6) Soit $x \in [0,1[$. La suite $\left(x^k\right)$ est strictement décroissante et de limite nulle, à partir d'un certain rang $x^k \in \left[0, e^{-1}\right[$ et donc $a_k x^k h\left(x^k\right) = 0$. Le terme général de la série considérée est donc nul à partir d'un certain rang, la suite des sommes partielles est stationnaire, ainsi

$$\boxed{\text{La série de terme général } a_k x^k h\left(x^k\right) \text{ converge.}}$$

7) Précisément, pour $x = e^{-1/n}$, j'ai pour tout k dans $\mathbb{N}$

$$x^k = e^{-k/n} = 0 \Leftrightarrow k > n$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k h\left(x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Le résultat du **5)** et l'égalité de Karamata donnent alors

$$\sqrt{1-e^{-1/n}} \sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 \quad \text{or} \quad \sqrt{1-e^{-1/n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{n}} \quad \text{car} \quad e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t.$$

En conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.}$$

C – Théorème taubérien

8) Par hypothèse $0 < \alpha < 1 < \beta$. En particulier, pour tout entier naturel n non nul, $\alpha n \in \left]0, n\right[$ et donc $[\alpha n] \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi $S_n - S_{[\alpha n]} = \displaystyle\sum_{k=[\alpha n]+1}^{n} a_k$ est une somme de $n - [\alpha n]$ termes, tous au moins égaux à a_n (puisque la suite (a_k) est décroissante). Par conséquent

$$S_n - S_{[\alpha n]} \geq (n - [\alpha n])\, a_n.$$

De même, $\beta n > n$ donc $[\beta n] \geq n$ et $S_{[\beta n]} - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{[\beta n]} a_k$ est une somme de $[\beta n] - n$ termes tous au plus égaux à a_n, d'où

$$S_{[\beta n]} - S_n \leq ([\beta n] - n)\, a_n.$$

En conclusion, dans le cas où $n - [\alpha n]$ et $[\beta n] - n$ sont non nuls, ils sont strictement positifs et

$$\boxed{\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leq a_n \leq \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}.}$$

9) Soit γ un réel strictement positif. Pour n suffisamment grand, j'ai $[\gamma n] > 0$ et

$$\gamma n - 1 < [\gamma n] \leq \gamma n \quad \text{d'où} \quad 1 - \frac{1}{\gamma n} < \frac{[\gamma n]}{\gamma n} \leq 1.$$

Or $\gamma n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc grâce au théorème d'encadrement, $\dfrac{[\gamma n]}{\gamma n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Autrement dit,

$$\boxed{\frac{[\gamma n]}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma.}$$

Par ailleurs, grâce à l'hypothèse $S_n \sim 2\sqrt{n}$, comme $[\gamma n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

$$\frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} \sim \frac{2\sqrt{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} \sim \frac{2\sqrt{\gamma n}}{\sqrt{n}}$$

d'après le résultat précédent, d'où finalement

$$\boxed{\frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\sqrt{\gamma}.}$$

10) Soit $\varepsilon > 0$. un réel strictement positif. D'après **8)**, j'ai, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en multipliant par $\sqrt{n} = \dfrac{1/\sqrt{n}}{1/n}$,

$$\frac{\dfrac{S_{[\beta n]}}{\sqrt{n}} - \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}}{\dfrac{[\beta n]}{n} - 1} \leq \sqrt{n} a_n \leq \frac{\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} - \dfrac{S_{[\alpha n]}}{\sqrt{n}}}{1 - \dfrac{[\alpha n]}{n}}.$$

D'après l'hypothèse $S_n \sim 2\sqrt{n}$ et les résultats précédents, le minorant tend vers $\dfrac{2\sqrt{\beta} - 2}{\beta - 1}$, il sera donc supérieur à $\dfrac{2\sqrt{\beta} - 2}{\beta - 1} - \varepsilon$ à partir d'un certain rang. De même le majorant tend vers $\dfrac{2 - 2\sqrt{\alpha}}{1 - \alpha}$, d'où, pour tout entier naturel n assez grand :

$$\boxed{\frac{2\left(\sqrt{\beta} - 1\right)}{\beta - 1} - \varepsilon \leq \sqrt{n} a_n \leq \frac{2\left(1 - \sqrt{\alpha}\right)}{1 - \alpha} + \varepsilon.}$$

11) J'ai

$$\frac{2\left(\sqrt{\beta} - 1\right)}{\beta - 1} = \frac{2}{\sqrt{\beta} + 1} \underset{\beta\to 1^+}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad \frac{2\left(1 - \sqrt{\alpha}\right)}{1 - \alpha} = \frac{2}{1 + \sqrt{\alpha}} \underset{\alpha\to 1^-}{\longrightarrow} 1.$$

$\varepsilon > 0$ étant fixé, je peux fixer, par définition de la limite, α et β tels que

$$0 < \alpha < 1 < \beta, \quad \frac{2\left(1 - \sqrt{\alpha}\right)}{1 - \alpha} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{2\left(\sqrt{\beta} - 1\right)}{\beta - 1} \geq 1 - \varepsilon.$$

Alors les résultats précédents me fournissent n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow 1 - 2\varepsilon \leq \sqrt{n} a_n \leq 1 + 2\varepsilon.$$

En conclusion, toujours par définition de la limite,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} a_n = 1, \text{ c'est-à-dire que } a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.}$$

D – Marche aléatoire

12) Soit $(i_1, \ldots, i_{n-k}) \in \{-1, 1\}^{n-k}$; puisque les X_ℓ sont mutuellement indépendantes, j'ai

$$\mathbf{P}\left(X_{k+1} = i_1, \ldots, X_n = i_{n-k}\right) = \prod_{\ell=1}^{n-k} \mathbf{P}\left(X_{k+\ell} = i_\ell\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

et de même

$$\mathbf{P}\left(X_1 = i_1, \ldots, X_{n-k} = i_{n-k}\right) = \prod_{\ell=1}^{n-k} \mathbf{P}\left(X_\ell = i_\ell\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

d'où

$$\boxed{\mathbf{P}\left(X_{k+1} = i_1, \ldots, X_n = i_{n-k}\right) = \mathbf{P}\left(X_1 = i_1, \ldots, X_{n-k} = i_{n-k}\right).}$$

13) Par définition des S_n, on a

$$\begin{cases} S_{k+1}-S_k=j_1 \\ S_{k+2}-S_k=j_2 \\ \vdots \\ S_n-S_k=j_{n-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_{k+1}=j_1 \\ X_{k+1}+X_{k+2}=j_2 \\ \vdots \\ X_{k+1}+\cdots+X_n=j_{n-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_{k+1}=j_1 \\ X_{k+2}=j_2-j_1 \\ \vdots \\ X_n=j_{n-k}-j_{n-k-1} \end{cases}$$

La question précédente donne alors

$$\mathbf{P}\left(S_{k+1}-S_k=j_1,\ldots,S_n-S_k=j_{n-k}\right)=\mathbf{P}\left(X_1=j_1,X_2=j_2-j_1,\ldots,X_{n-k}=j_{n-k}-j_{n-k-1}\right)$$

(précisément, au **12)** les i_ℓ étaient supposés dans $\{-1,1\}$, mais s'ils n'y sont pas tous l'égalité reste vraie puisqu'elle s'écrit $0=0$, les X_ℓ ne prenant que les valeurs -1 et 1 !).

En faisant le trajet dans l'autre sens je remarque que

$$\begin{cases} X_1=j_1 \\ X_2=j_2-j_1 \\ \vdots \\ X_{n-k}=j_{n-k}-j_{n-k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1=j_1 \\ S_2=j_2 \\ \vdots \\ S_{n-k}=j_{n-k} \end{cases}$$

d'où finalement

$$\boxed{\mathbf{P}\left(S_{k+1}-S_k=j_1,\ldots,S_n-S_k=j_{n-k}\right)=\mathbf{P}\left(S_1=j_1,\ldots,S_{n-k}=j_{n-k}\right)}$$

14) Par définition des événements considérés,

$$A_k^n=(S_k=0)\cap(S_{k+1}\neq 0)\cap\cdots\cap(S_n\neq 0)$$

d'où, par la formule des probabilités composées,

$$\mathbf{P}\left(A_k^n\right)=\mathbf{P}\left(S_k=0\right)\mathbf{P}_{(S_k=0)}\left(S_{k+1}\neq 0,\ldots,S_n\neq 0\right).$$

Or trivialement

$$\mathbf{P}_{(S_k=0)}\left(S_{k+1}\neq 0,\ldots,S_n\neq 0\right)=\mathbf{P}_{(S_k=0)}\left(S_{k+1}-S_k\neq 0,\ldots,S_n-S_k\neq 0\right)$$

et il apparaît que $S_{k+1}-S_k,\ldots,S_n-S_k$ sont des fonctions de $X_{k+1},\ldots X_n$, tandis que S_k est fonction de $X_1,\ldots,X_k$. Donc, en vertu du lemme des coalitions, $S_{k+1}-S_k,\ldots,S_n-S_k$ sont indépendantes de S_k, d'où

$$\mathbf{P}_{(S_k=0)}\left(S_{k+1}-S_k\neq 0,\ldots,S_n-S_k\neq 0\right)=\mathbf{P}\left(S_{k+1}-S_k\neq 0,\ldots,S_n-S_k\neq 0\right).$$

Or

$$\left(S_{k+1}-S_k\neq 0,\ldots,S_n-S_k\neq 0\right)=\bigcup_{(j_1,\ldots,j_{n-k})\in(\mathbb{N}^*)^{n-k}}\left(S_{k+1}-S_k=j_1,\ldots,S_n-S_k=j_{n-k}\right)$$

et il s'agit d'une union dénombrable (comme $(\mathbb{N}^*)^{n-k}$) d'événements incompatibles 2 à 2, donc par σ-additivité

$$\mathbf{P}\left(S_{k+1}-S_k\neq 0,\ldots,S_n-S_k\neq 0\right)=\sum_{(j_1,\ldots,j_{n-k})\in(\mathbb{N}^*)^{n-k}}\mathbf{P}\left(S_{k+1}-S_k=j_1,\ldots,S_n-S_k=j_{n-k}\right).$$

Alors d'après **13)**,

$$\mathbf{P}\left(S_{k+1}-S_k\neq 0,\ldots,S_n-S_k\neq 0\right)=\sum_{(j_1,\ldots,j_{n-k})\in(\mathbb{N}^*)^{n-k}}\mathbf{P}\left(S_1=j_1,\ldots,S_{n-k}=j_{n-k}\right)$$

où je reconnais, par définition, $\mathbf{P}\left(E_{n-k}\right)$, puisqu'il s'agit de la probabilité pour qu'aucune des variables aléatoires $S_1,\ldots,S_{n-k}$ ne prenne la valeur 0.

En conclusion,

$$\boxed{\mathbf{P}(A_k^n)=\mathbf{P}\left(S_k=0\right)\mathbf{P}\left(E_{n-k}\right).}$$

15) Soit $n \in \mathbb{N}$. Fixons $\omega \in \Omega$; comme $S_0(\omega) = 0$, l'ensemble $\{k \in [\![0, n]\!] \ / \ S_k(\omega) = 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui admet donc un plus grand élément. Alors par définition $\omega \in A_k^n$. Par conséquent $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n} A_k^n$. Or les A_k^n, $k \in [\![0, n]\!]$ sont incompatibles 2 à 2 (si ω appartenait à A_k^n et à A_ℓ^n avec $0 \leq k < \ell \leq n$, j'aurais $S_\ell(\omega) \neq 0$ du fait que $\omega \in A_k^n$ et $k+1 \leq \ell \leq n$, tandis que $S_\ell(\omega) = 0$ du fait que $\omega \in S_\ell$).

En conclusion, grâce au **14)**,

$$\boxed{1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(S_k = 0)\,\mathbf{P}(E_{n-k}).}$$

16) Comme les probabilités sont bornées, les deux séries entières $\sum \mathbf{P}(S_n = 0)\,x^n$ et $\sum \mathbf{P}(E_n)\,x^n$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 ; je peux donc appliquer la formule du produit de Cauchy pour tout x de $]-1, 1[$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0)\,x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(E_n)\,x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(S_k = 0)\,\mathbf{P}(E_{n-k})\right)x^n$$

où je reconnais la série géométrique $\sum x^n$ grâce au **15)**.

$$\boxed{\forall x \in\,]-1, 1[\quad \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0)\,x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(E_n)\,x^n\right).}$$

17) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$. $S_n(\omega)$ est la somme de n valeurs valant chacune 1 ou -1. Si cette somme est nulle, n est nécessairement pair ! Ainsi, par contraposée, si n est impair l'événement $(S_n = 0)$ est impossible.

Je suppose maintenant n pair et j'écris $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. $S_n(\omega)$ est nul si et seulement si le nombre de 1 dans la famille $\big(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big)$ vaut exactement k. Or, vu la loi suivie par les X_i et leur indépendance mutuelle, ledit nombre de 1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. En conclusion,

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair, } \mathbf{P}(S_n = 0) = 0 \text{ et } \mathbf{P}(S_{2k} = 0) = \tbinom{2k}{k} \cdot \frac{1}{2^{2k}}.}$$

18) Le résultat précédent permet de calculer, pour $x \in\,]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0)\,x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{x^{2k}}{2^{2k}}$$

où je reconnais le développement en série entière du préliminaire !

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0)\,x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}\left(x^2\right)^k = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il enrésulte, grâce au **16)**, après simplification par $\sqrt{1-x}$,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(E_n)\,x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.}$$

19) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathbf{P}(E_n)$. D'après le résultat précédent, la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1 et que sa fonction somme f vérifie

$$\forall x \in\,]-1, 1[\quad f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \text{d'où} \quad \sqrt{1-x}\,f(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}.$$

Le **7)** donne alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sim 2\sqrt{n}$$

et le **11)** s'applique, car $E_{k+1} = (T > k+1) \subset (T > k) = E_k$: la suite (a_k) est donc bien positive et décroissante, par croissance de $\mathbf{P}$. J'ai donc $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, d'où finalement

$$\boxed{\mathbf{P}(E_n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.}$$

20) Par définition, $(T=+\infty)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(T>n)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}E_n$; or nous venons de voir que la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc par continuité décroissante de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(E_n).$$

Il en résulte grâce au **19)** :

$$\boxed{\mathbf{P}(T=+\infty)=0.}$$

Autrement dit il est presque certain que le trajet repasse par l'origine en un temps fini.

21) Soit $x\in\,]-1,1[$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, j'ai

$$(T>n)\subset(T>n-1)\quad\text{ et }\quad(T=n)=(T>n-1)\setminus(T>n)$$

d'où

$$\mathbf{P}(T=n)=\mathbf{P}(E_{n-1})-\mathbf{P}(E_n)$$

et donc, commme les deux séries obtenues en séparant la somme en deux convergent,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(T=n)\,x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(E_{n-1})\,x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(E_n)\,x^n=x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\mathbf{P}(E_0)\right)$$

grâce au **18)** et en réindexant la première somme. Or par définition T ne prend que des valeurs supérieures ou égales à 1, donc $\mathbf{P}(E_0)=1$, d'où finalement

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(T=n)\,x^n=1-(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=1-\sqrt{1-x^2},$$

cela pour tout x de $]-1,1[$. Mais cette relation est encore vraie pour $x=1$, puisque d'après **20)**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(T=n)=\mathbf{P}(T<+\infty)=1.$$

En conclusion, puisque la relation est vraie pour tout x de $]-1,1]$, j'ai en particulier :

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x\in[0,1],\ 1-\sqrt{1-x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(T=n)\,x^n.}$$

22) Reste à obtenir directement le développement en série entière de $\varphi: x\mapsto 1-\sqrt{1-x^2}$. Or φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et je peux réutiliser le préliminaire :

$$\forall x\in\,]-1,1[\quad\varphi'(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=x\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}x^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}x^{2k+1}$$

d'où, par intégration terme à terme sur $[0,x]$, qui est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, compte tenu de $\varphi(0)=0$ en en réindexant

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}\frac{x^{2k+2}}{2k+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n-2}{n-1}}{4^{n-1}}\frac{x^{2n}}{2n}.$$

J'en déduis, par unicité des coefficients d'une série entière

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad\mathbf{P}(T=2n)=\binom{2n-2}{n-1}\frac{1}{2n4^{n-1}}=\frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}\cdot\frac{1}{2.4^{n-1}}=\frac{(2n-2)!}{(n!)^2}\cdot\frac{2n}{4^n},$$

soit finalement, en multipliant en haut et en bas par $2n-1$,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*\quad\mathbf{P}(T=2n)=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.}$$

Problème B – *Supplémentaires et calcul différentiel*

1) Toute sous-famille finie de $(f_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une sous-famille de $\mathcal{F}_n = (f_{i,j})_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2}$ pour n assez grand. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{F}_n$ est libre pour tout n (une sous-famille d'une famille libre est libre). Soit $n \geq 0$; supposons que

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} \alpha_{i,j} f_{i,j} = 0$$

En particulier, pour y fixé dans $\mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_{i,j} y^j\right)}_{=P_i(y)} x^i = 0$$

Ce polynôme en x étant nul tous ses coefficients $P_i(y)$ sont nuls, autrement dit

$$\forall i \in [\![0,n]\!] \quad \sum_{j=0}^{n} \alpha_{i,j} y^j = 0$$

et cela pour tout y de $\mathbb{R}$. Pour i fixé, j'en déduis de même que les $\alpha_{i,j}$, $j \in [\![0,n]\!]$, sont nuls. Cela pour tout i donc tous les $\alpha_{i,j}$ sont nuls : la famille $\mathcal{F}_n$ est libre et finalement

$$\boxed{\text{La famille } (f_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \text{ est libre.}}$$

2) Noter que l'énoncé aurait mieux fait de demander de montrer que F est stable par Δ et Φ et de parler d'endomorphismes induits. C'est ce que je vais faire, sans me montrer trop désobligeant…

La dérivation (même partielle) étant linéaire, Δ et Φ sont linéaires. Comme

$$\forall (i,j) \quad \Delta(f_{i,j}) = i(i-1)f_{i-2,j} - j(j-1)f_{i,j-2} \quad \text{et} \quad \Phi(f_{i,j}) = ij f_{i-1,j-1} \qquad (*)$$

avec la convention $f_{u,v} = 0$ si $u < 0$ ou $v < 0$. Les éléments d'une famille génératrice de F ayant leur image dans F, F est stable par les applications linéaires Δ et Φ qui induisent donc sur F des endomorphismes $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Phi}$.

$$\boxed{\tilde{\Delta} \text{ et } \tilde{\Phi} \text{ sont des endomorphismes de } F.}$$

3) Soit $f \in F$. Il existe une famille $(\alpha_{i,j})$ de scalaires dont un nombre fini seulement sont non nuls telle que

$$f = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \alpha_{i,j} f_{i,j}.$$

La somme ci-dessus étant en fait finie, il n'y a pas de problème pour écrire (en utilisant $(*)$ et en réindexant) que

$$\Phi(f) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \alpha_{i,j}\Phi(f_{i,j}) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}} \alpha_{i,j} \cdot ij f_{i-1,j-1}$$

La famille $(f_{i,j})$ étant libre j'ai donc

$$\phi(f) = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \mathbb{N}^{*2} \quad \alpha_{i,j} = 0$$

autrement dit

$$\boxed{\operatorname{Ker}\tilde{\Phi} = \operatorname{Vect}(f_{0,i})_{i\in\mathbb{N}} + \operatorname{Vect}(f_{i,0})_{i\in\mathbb{N}}.}$$

C'est l'ensemble des fonctions de F s'écrivant comme la somme d'un polynôme en x et d'un polynôme en y.

4) Soit $f \in F$. Il existe une famille $(\alpha_{i,j})$ de scalaires dont un nombre fini seulement sont non nuls telle que

$$f = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \alpha_{i,j} f_{i,j}.$$

J'ai alors (les sommes étant en fait finies), pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, après réindexation,

$$f(x,y) = xy \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \alpha_{i+1,j+1} x^i y^j + \underbrace{\alpha_{0,0} + \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \alpha_{i,0}x^i + \alpha_{0,i}y^i}_{\in\operatorname{Ker}\tilde{\Phi}}$$

d'où $f \in f_{1,1}F + \operatorname{Ker}\widetilde{\Phi}$, cela pour tout f de F. Ainsi, l'autre inclusion étant banale,

$$F = f_{1,1}F + \operatorname{Ker}\widetilde{\Phi}.$$

Par ailleurs, si $f \in f_{1,1}F \cap \operatorname{Ker}\tilde{\Phi}$ alors f s'écrit comme combinaison des $f_{i,j}$ pour $i, j \geq 1$ et comme combinaison des $f_{i,0}, f_{0,i}$. En écrivant $f - f = 0$, j'obtiens une combinaison nulle des $f_{i,j}$ et donc des coefficents tous nuls ce qui donne $f = 0$. La somme est donc directe et j'ai bien

$$\boxed{F = f_{1,1}F \oplus \operatorname{Ker}\tilde{\Phi}}$$

5) Les applications coordonnées de w sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ par les théorèmes opératoires classiques. Ainsi, par composition, pour tout $f \in F$, j'ai $f \circ w \in E$.

Comme $(\lambda f + g) \circ w = \lambda f \circ w + g \circ w$, L est linéaire. Montrons que F est stable par L : par linéarité,

$$L(F) = \operatorname{Vect}\left((L(f_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}\right)$$

Or $f_{i,j} \circ w : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{2^{i+j}}(x+y)^i(x-y)^j$, d'où $L(f_{i,j}) \in F$ (en développant par la formule du binôme) ; ainsi $L(F) \subset F$.

Le déterminant de w vaut $-1/4$, w est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. Si $L(f) = 0$, en composant par w^{-1} à droite j'obtiens $f = 0$. L est donc injective. L est finalement un automorphisme de F dans $L(F)$.

Réciproquement, soit $g \in F$, j'ai aussi $f = g \circ w^{-1} \in F$ (même preuve puisque w^{-1} est linéaire) et $L(f) = g$ ce qui prouve que $F \subset L(F)$. Au final

$$\boxed{L \text{ est donc un automorphisme de } F.}$$

6) Soient $f \in E$ et $g = L(f) = f \circ w$. J'ai $g(u, v) = f\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right)$. Ainsi, en notant $(x, y) = w(u, v)$ et en conservant les notations $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ pour les dérivées partielles de la fonction polynomiale g,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(u, v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

et, compte tenu du théorème de Schwarz, g étant $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(u, v) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right) = \frac{1}{4}\Delta(f)(x, y).$$

J'ai donc $\Phi(g) = 0$ si et seulement si $\Delta(f) = 0$ (car (x, y) parcourt $\mathbb{R}^2$ quand (u, v) parcourt $\mathbb{R}^2$). Ainsi

$$\boxed{L(\operatorname{Ker}\tilde{\Delta}) = \operatorname{Ker}\tilde{\phi}.}$$

7) Soient $f \in F$ et $g = \delta f : (x, y) \mapsto (x^2 - y^2)f(x, y)$. J'ai pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$L(g)(u, v) = g \circ w(u, v) = \left(\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2\right) f \circ w(u, v) = uv(f \circ w)(u, v) = uvL(f)(u, v)$$

Je viens donc de montrer que : $\forall f \in F \quad L(\delta f) = f_{1,1}L(f) \in f_{1,1}F$.

Comme L est un automorphisme de F, je peux écrire (en appliquant le résultat précédent à $f = L^{-1}(h)$)

$$\forall h \in F \quad f_{1,1}h = L\left(\delta L^{-1}(h)\right) = L(\delta f) \in L(\delta F)$$

J'ai ainsi

$$\boxed{L(\delta F) = f_{1,1}F.}$$

8) Soit $f \in F$. $L(f) \in F$ et avec la question **4)** j'obtiens $\varphi \in f_{1,1}F$ et $\phi \in \operatorname{Ker}\widetilde{\Phi}$ telles que $L(f) = \varphi + \phi$.

La question **6)** donne $\psi \in \operatorname{Ker}\tilde{\Delta}$ telle que $\phi = L(\psi)$.

La question **7)** donne $\nu \in F$ tel que $L(\delta\nu) = \varphi$. Par bijectivité de L, j'en déduis que $f = \delta\nu + \psi$.

Cette décomposition ayant été obtenue pour tout f de F, j'ai par conséquent $F = \delta F + \operatorname{Ker}\tilde{\Delta}$.

Par ailleurs, comme $f_{1,1}F$ et $\operatorname{Ker}\tilde{\Phi}$ sont en somme directe et comme L est un automorphisme, les images par L^{-1} de ces sous-espaces sont également en somme directe. J'ai finalement montré que

$$\boxed{F = \delta F \oplus \operatorname{Ker}\tilde{\Delta}.}$$