D.S. 5 *(3h30)*

Le sujet se compose de deux problèmes indépendants

Problème A

A – Préliminaire

1) Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k$$

B – Identité de Karamata

On considère dans cette partie une suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout réel $x \in]-1,1[$, la série de terme général $a_k x^k$ converge absolument. Pour tout réel $x \in]-1,1[$, on note $f(x)$ la somme de cette série et l'on suppose que

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\, f(x) = \sqrt{\pi}.$$

2) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer :

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}$$

3) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$$

et calculer sa valeur. En déduire l'égalité :

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t.$$

On admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

4) Montrer que pour toute application polynomiale réelle Q, on a :

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} Q(e^{-t})}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$$

Soit h la fonction définie, pour tout $x \in [0,1]$, par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, e^{-1}[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [e^{-1}, 1] \end{cases}$$

5) Justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} h(e^{-t})}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$$

et donner sa valeur.

6) Soit $x \in [0,1[$. Justifier la convergence de la série de terme général $a_k x^k h(x^k)$.
On admet l'égalité (dite de KARAMATA*) :*

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k h(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} h(e^{-t})}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$$

7) En utilisant ce résultat pour $x = e^{-\frac{1}{n}}$, en déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

C – Théorème taubérien

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de réels positifs et, pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. On fait l'hypothèse que

$$S_n \underset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

On va montrer qu'alors

$$a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On notera $[x]$ la partie entière d'un réel x.

8) Soit (α, β) un couple de nombres réels vérifiant : $0 < \alpha < 1 < \beta$. Pour tout entier naturel n tel que $n - [\alpha n]$ et $n - [\beta n]$ soient non nuls, justifier l'encadrement :

$$\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leq a_n \leq \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}.$$

9) Soit γ un réel strictement positif. Déterminer les limites des suites de termes généraux

$$\frac{[\gamma n]}{n} \quad \text{et} \quad \frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}}.$$

10) Soit ε un réel strictement positif. Montrer que, pour tout entier naturel n assez grand, on a :

$$\frac{2\left(\sqrt{\beta} - 1\right)}{\beta - 1} - \varepsilon \leq \sqrt{n} a_n \leq \frac{2\left(1 - \sqrt{\alpha}\right)}{1 - \alpha} + \varepsilon.$$

11) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} a_n = 1$.

D – Marche aléatoire

On considère $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$.
On définit les *applications coordonnées*, pour tout $i \geq 1$,

$$X_i : \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega \mapsto \omega_i \in \{-1, 1\}.$$

On admet que l'on peut construire une tribu $\mathcal{B}$ et une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω, de sorte que les X_i soient des variables aléatoires, mutuellement indépendantes et de même loi donnée par

$$\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

On définit la suite de variables aléatoires $(S_n,\ n \geq 0)$ par

$$S_0(\omega) = 0, \quad S_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega).$$

On définit enfin la variable aléatoire T par

$$\begin{array}{rccl} T : & \Omega & \to & \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ & \omega & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & \text{si } S_n(\omega) \neq 0 \text{ pour tout } n \geq 1 \\ \min\left\{n \geq 1 \ / \ S_n(\omega) = 0\right\} & \text{s'il existe } n \geq 1 \text{ tel que } S_n(\omega) = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Pour tout entier naturel n, on note $E_n = \{T > n\}$, pour $n \geq 1$, on pose $A_n^n = \{S_n = 0\}$ et, pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$A_k^n = \{S_k = 0\} \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} \{S_i \neq 0\}.$$

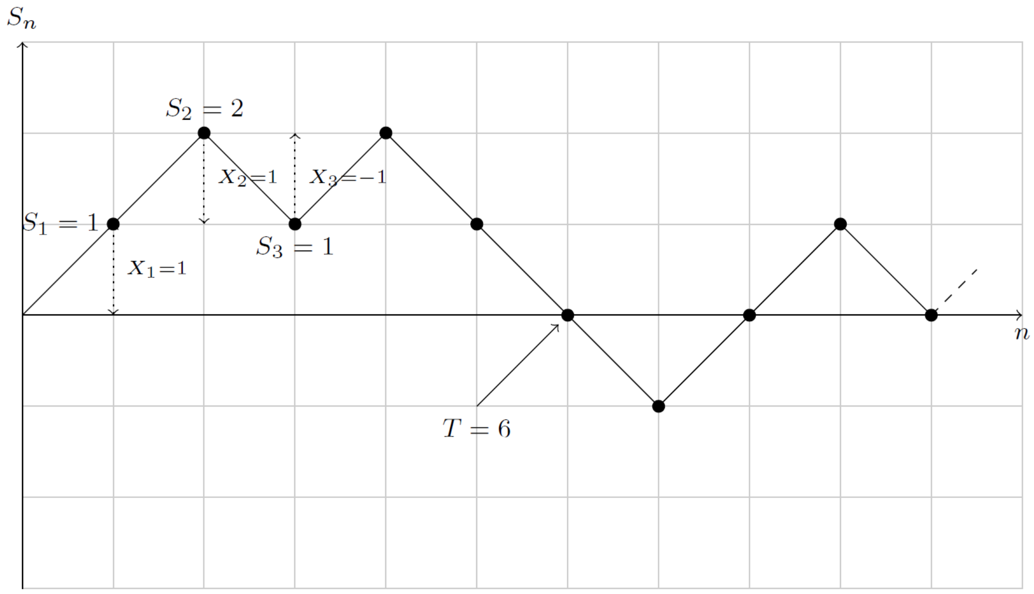

FIGURE 1. Notations.
Ici ω commence par $(1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1\ldots)$.
ω appartient à A_6^6 et A_8^8, ainsi qu'à A_0^1, A_0^2,…, A_0^5, A_6^7, etc.

12) Montrer pour tout $1 \leq k < n$, pour tout $(i_1, \ldots, i_{n-k}) \in \{-1, 1\}^{n-k}$,

$$\mathbf{P}\left(X_{k+1} = i_1, \ldots, X_n = i_{n-k}\right) = \mathbf{P}\left(X_1 = i_1, \ldots, X_{n-k} = i_{n-k}\right).$$

13) Montrer pour tout $1 \leq k < n$, pour tout $(j_1, \ldots, j_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$ que

$$\mathbf{P}\left(S_{k+1} - S_k = j_1, \ldots, S_n - S_k = j_{n-k}\right) = \mathbf{P}\left(S_1 = j_1, \ldots, S_{n-k} = j_{n-k}\right).$$

14) En déduire que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$: $\mathbf{P}(A_k^n) = \mathbf{P}\left(S_k = 0\right)\mathbf{P}\left(E_{n-k}\right)$.
On admettra que deux variables aléatoires, l'une fonction de $X_1, \ldots, X_k$, l'autre fonction de $X_{k+1}, \ldots, X_n$, sont indépendantes (lemme des coalitions).

15) Montrer l'égalité : $1 = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{P}\left(S_k = 0\right)\mathbf{P}\left(E_{n-k}\right)$.

16) Pour tout réel x de $]-1, 1[$, établir l'égalité :

$$\frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_n = 0\right) x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(E_n\right) x^n\right).$$

17) Pour tout entier naturel n, calculer $\mathbf{P}(S_n = 0)$.
Indication : on discutera suivant la parité de n.

18) En déduire que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(E_n\right) x^n = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

19) À l'aide des résultats obtenus dans les parties précédentes déterminer, quand l'entier naturel n tend vers l'infini, un équivalent de $\mathbf{P}(E_n)$.

20) Montrer que l'on a : $\mathbf{P}\left(T = +\infty\right) = 0$.

21) Pour tout réel $x \in [0, 1]$, prouver l'égalité :

$$1 - \sqrt{1 - x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(T = n\right) x^n.$$

22) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}\left(T = 2n\right) = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

Problème B – *Supplémentaires et calcul différentiel*

La définition suivante permet d'étendre les notions de famille génératrice et de famille libre aux espaces vectoriels qui ne sont pas de dimension finie.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et I un ensemble d'indices non nécessairement fini.

- Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est dite *génératrice de* E lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire d'une sous-famille **finie** $(e_i)_{i\in J}$ de $(e_i)_{i\in I}$.
- Une famille est dite *libre dans* E lorsque toute sous-famille **finie** de cette famille est libre.

Soit E l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, on définit la fonction

$$f_{i,j} : (x,y) \mapsto x^i y^j .$$

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(f_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$. On pose

$$\Delta : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \Phi : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{array}$$

Pour $g\in F$, on note gF l'ensemble des fonctions qui s'écrivent gf avec $f\in F$.

1) Prouver que la famille $(f_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est libre.

2) Montrer que les restrictions $\widetilde{\Delta}$ (respectivement $\widetilde{\Phi}$) de Δ (respectivement Φ) à F sont des endomorphismes de F.

3) Déterminer $\operatorname{Ker}\widetilde{\Phi}$.

4) Montrer que $F = f_{1,1}F \oplus \operatorname{Ker}\widetilde{\Phi}$.

5) Soit le changement de variables

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right) \end{array}$$

ainsi que l'application

$$L : \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ f & \mapsto & f\circ w \end{array} .$$

Montrer que L est un automorphisme de F.

6) Montrer que $L\left(\operatorname{Ker}\widetilde{\Delta}\right) = \operatorname{Ker}\widetilde{\Phi}$.

7) On note $\delta = f_{2,0} - f_{0,2}$ l'application $(x,y)\mapsto x^2-y^2$. Montrer que $L(\delta F) = f_{1,1}F$.

8) Déterminer un supplémentaire de $\operatorname{Ker}\widetilde{\Delta}$ dans F.