Problème A : équation et fonction de Bessel

Partie I

1) Soit x réel ; la fonction cos étant paire, j'ai :

$$J_{-N}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(-N\theta - x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(N\theta + x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = J_N(-x)\ ;$$

de plus, grâce au changement de variable $\varphi = \pi - \theta$, j'obtiens

$$J_N(-x) = \frac{1}{\pi}\int_\pi^0 \cos(N(\pi-\varphi) + x\sin(\pi-\varphi))(-\mathrm{d}\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (-1)^N \cos(-N\varphi + x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

d'où, toujours d'après la parité de cos :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad J_{-N}(x) = J_N(-x) = (-1)^N J_N(x).}$$

2) Soit la fonction $f : (x,\theta) \mapsto \cos(N\theta - x\sin\theta)$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^\pi f(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta$, de sorte que $J_N = g/\pi$.

Je montre que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en appliquant le théorème de dérivation sous le signe $\int$:

- pour tout θ de $[0,\pi]$, la fonction $x \mapsto f(x,\theta)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
- pour tout x de $\mathbb{R}$, la fonction $\theta \mapsto f(x,\theta)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,\pi]$ (car continue sur un segment !)
- pour tout x de $\mathbb{R}$, la fonction $\theta \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\theta) = (-\sin\theta)\cos\left(N\theta - x\sin\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$
- *domination* : j'ai pour tout $(x,\theta)\in\mathbb{R}\times[0,\pi]$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\theta)\right| \leq 1$ et la fonction $t\mapsto 1$ est indépendante de x, continue par morceaux et intégrable sur $[0,\pi]$!

Donc g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et la formule de Leibniz s'applique.

Pour les dérivées d'ordre supérieur, le raisonnement est similaire : toutes les fonctions considérées sont en fait $\mathcal{C}^\infty$ et les dérivées successives par rapport à x sont toutes dominées par la constante 1 puisque par une récurrence immédiate

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad \forall(x,\theta)\in\mathbb{R}\times[0,\pi]\quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\theta) = (-\sin\theta)^k\cos\left(N\theta - x\sin\theta + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Il en résulte que g et donc J_N sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que les dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe $\int$. En particulier :

$$\boxed{J_N \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ et : } \forall x\in\mathbb{R}\quad \begin{cases} J_N'(x) &= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin\theta\sin(N\theta - x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ J_N''(x) &= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi -\sin^2\theta\cos(N\theta - x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{cases}.}$$

3) Soient $u : \theta\mapsto \sin(N\theta - x\sin\theta)$ et $v : \theta \mapsto N + x\cos\theta$ les fonctions indiquées par l'énoncé. Pour $x\in\mathbb{R}$ fixé, il s'agit de montrer que l'expression

$$z(x) = \pi\left[x^2 J_N''(x) + xJ_N'(x) + \left(x^2 - N^2\right)J_N(x)\right]$$

est nulle. Or d'après la question précédente

$$\begin{aligned} z(x) &= \int_0^\pi \left[\left(-x^2\sin^2\theta + x^2 - N^2\right)\cos(N\theta - x\sin\theta) + x\sin\theta\sin(N\theta - x\sin\theta)\right]\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi \left[(x\cos\theta + N)(x\cos\theta - N)\cos(N\theta - x\sin\theta) + x\sin\theta\sin(N\theta - x\sin\theta)\right]\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi \left[-v(\theta)u'(\theta) - v'(\theta)u(\theta)\right]\mathrm{d}\theta = -\left[v(\theta)u(\theta)\right]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

car $u(0) = u(\pi) = 0$. Il en résulte que :

$$\boxed{J_N \text{ est solution de } (B_N) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

4) Il vient immédiatement, compte tenu des expressions du **2)** :

$$\boxed{J_0(0) = 1\ ;\ J_0'(0) = 0\ ;\ J_0''(0) = -1/2.}$$

5) a) Soit x réel ; j'ai pour tout θ de $[0,\pi]$:

$$\cos\left((N-1)\theta - x\sin\theta\right) + \cos\left((N+1)\theta - x\sin\theta\right) = 2\cos\theta\cos\left(N\theta - x\sin\theta\right)$$

d'où, en multipliant par x/π et en intégrant de 0 à π :

$$\begin{aligned} x\left(J_{N-1}(x) + J_{N+1}(x)\right) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos\theta\cos\left(N\theta - x\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(-N + x\cos\theta\right)\cos\left(N\theta - x\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta + 2NJ_N(x) \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\sin\left(N\theta - x\sin\theta\right)\right]_0^\pi + 2NJ_N(x) = 2NJ_N(x) \end{aligned}$$

D'où, en divisant par x :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^* \quad J_{N-1}(x) + J_{N+1}(x) = \frac{2N}{x}J_N(x).}$$

b) J'ai de même :

$$\cos\left((N-1)\theta - x\sin\theta\right) - \cos\left((N+1)\theta - x\sin\theta\right) = 2\sin\theta\sin\left(N\theta - x\sin\theta\right)$$

d'où, en multipliant par $1/\pi$ et en intégrant de 0 à π, d'après le **2)** :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad J_{N-1}(x) - J_{N+1}(x) = 2J_N'(x).}$$

c) Avec $N = 0$ dans le résultat précédent, sachant que $J_{-1} = -J_1$ d'après le **1),** j'ai bien

$$\boxed{J_1 = -J_0'.}$$

Partie II – Développement en série entière de J_N

1) D'après le développement en série entière de la fonction cos, j'ai, pour tout x réel :

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(x\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x\sin\theta\right)^{2n}\right)\mathrm{d}\theta\ ;$$

Soit, pour x fixé, u_n la fonction de θ définie par $u_n : \theta \mapsto \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x\sin\theta\right)^{2n}$; la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,\pi]$: en effet, $\sup\limits_{[0,\pi]}|u_n| = \dfrac{1}{(2n)!}|x|^{2n}$ est le terme général d'une série convergente (de somme $\operatorname{ch}|x|$) ; donc $\sum u_n$ converge uniformément sur le segment $[0,\pi]$, par conséquent je peux intégrer terme à terme :

$$\int_0^\pi\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^\pi u_n \quad \text{d'où} \quad J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}W_n x^{2n}\ , \quad \text{avec } W_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2n}\theta\mathrm{d}\theta.$$

Cela pour tout réel x, donc J_0 est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (rayon de convergence infini) ; pour expliciter les coefficients, je peux reprendre l'équation différentielle (B_0), ou bien calculer W_n : j'ai $W_0 = 1$ et une intégration par parties me fournit la relation classique

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad W_n = \frac{2n-1}{2n}W_{n-1}$$

d'où, à l'aide d'une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N} \quad W_n = \dfrac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2}$. En conclusion :

$$\boxed{J_0 \text{ est développable en série entière sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{\left(2^n n!\right)^2}.}$$

2) a) Je peux reprendre la méthode précédente, en écrivant

$$\cos\left(N\theta - x\sin\theta\right) = \cos N\theta\cos\left(x\sin\theta\right) + \sin N\theta\sin\left(x\sin\theta\right).$$

Je peux aussi montrer par récurrence sur N que J_N est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, en remarquant que $J_1 = -J_0'$ (d'après le **I–5)c)**), donc que J_1 est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, comme J_0 ; puis j'utilise la relation du **I–5)b)** pour prouver que, si J_{N-1} et J_N sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, alors J_{N+1} l'est aussi. Finalement,

$$\boxed{\text{Pour tout } N,\ J_N \text{ est développable en série entière sur } \mathbb{R}.}$$

b) Soit alors $N \geq 2$ (le développement de $J_1 = -J_0'$ se déduira de celui de J_0') obtenu au **1)**). J'appelle (a_n) la suite des coefficients du développement en série entière de J_N . À l'aide du théorème de dérivation terme à terme des séries entières et grâce à quelques réindexations, j'obtiens :

$$\text{si } y = J_N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \text{alors } xy' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n,\ x^2 y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n,\ x^2 y = \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n$$

d'où, d'après (B_N) et l'unicité des coefficients d'une série entière :

$$-N^2 a_0 = 0 \ ; \quad \left(1 - N^2\right) a_1 = 0 \ ; \quad \forall n \geq 2 \quad \left(n^2 - N^2\right) a_n + a_{n-2} = 0.$$

Il en résulte

$$a_0 = a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n < N \quad a_n = \frac{a_{n-2}}{N^2 - n^2},$$

d'où, par une récurrence immédiate,

$$\forall n < N \quad a_n = 0.$$

De même, de

$$a_{N-1} = 0 \quad \text{et} \quad \forall n > N \quad a_n = \frac{a_{n-2}}{N^2 - n^2} = \frac{-1}{(n-N)(n+N)} a_{n-2}$$

je déduis par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_{N+2k+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{N+2k} = \frac{(-1)^k N!}{2^{2k} k! (N+k)!} a_N.$$

Il reste à calculer a_N , qui n'est autre que $\dfrac{J_N^{(N)}(0)}{N!}$; or la relation du **I–5)b)** donne en dérivant $n-1$ fois :

$$\forall n \geq 1 \quad J_n^{(n)}(0) = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}^{(n-1)}(0) - J_{n+1}^{(n-1)}(0)\right).$$

Et le calcul précédent a montré entre autres choses que (en remplaçant N par n) :

$$\forall n \geq 2 \quad \forall p < n \quad J_n^{(p)}(0) = 0.$$

Finalement :

$$\forall n \geq 1 \quad J_n^{(n)}(0) = \frac{1}{2} J_{n-1}^{(n-1)}(0) \quad \text{or} \quad J_0^{(0)}(0) = 1, \quad \text{d'où} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad J_n^{(n)}(0) = \frac{1}{2^n}.$$

Donc $a_N = \dfrac{1}{2^N N!}$ et je peux conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad J_N(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_N(k)\, x^{N+2k}, \text{ avec } \forall k \in \mathbb{N} \quad \alpha_N(k) = \frac{(-1)^k}{2^{N+2k} k! (N+k)!}.}$$

Il apparaît que cette expression est encore correcte pour $N = 0$ et pour $N = 1$.

Problème B

Préliminaires

1) Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormale de E. Notons u l'unique endomorphisme de E tel que $u(e_1) = e_1$ et $\forall i \geq 2,\ u(e_i) = 0$. u est un endomorphisme de E de rang 1. Il est symétrique (puisque représenté dans une base orthonormale par une matrice symétrique, ici diagonale).

Enfin, si $x \in E$ alors $(u(x)|x) = (e_1|x)^2$ (puisque $x = \sum_{i=1}^{p} (e_i|x).e_i$ et $u(x) = (e_1|x).e_1$) et donc $(u(x)|x) \geq 0$. Finalement, $u \in T(E)$.

Cependant, $-u \notin T(E)$ puisque $(-u(e_1)|e_1) = -1 < 0$. $T(E)$ n'est donc pas stable par multiplication par un scalaire.

$$\boxed{T(E) \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E).}$$

2) L'application est bien définie est symétrique, du fait de la propriété connue $\mathrm{Tr}\,(f \circ g) = \mathrm{Tr}\,(g \circ f)$.
De plus,

$$\langle \lambda f + g, h\rangle = \mathrm{Tr}\,((f + \lambda g) \circ h) = \mathrm{Tr}\,(\lambda f \circ h + g \circ h) = \lambda \mathrm{Tr}\,(f \circ g) + \mathrm{Tr}\,(g \circ h) = \lambda \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$$

ce qui donne la linéarité par rapport à la première variable, d'où la bilinéarité par symétrie. Notons $A = (a_{i,j})$ la matrice représentant f dans une base orthonormale. J'ai ${}^tA = A$ par symétrie de f et

$$\langle f, f\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^2\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tAA\right) = \sum_{1\le i,j\le p} a_{i,j}^2$$

C'est une quantité positive qui n'est nulle que si A, et donc aussi f, est nulle. J'ai donc le caractère défini positif.

$$\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{S}(E).}$$

N.B. J'aurais aussi pu utiliser le théorème spectral pour établir $\langle f, f\rangle = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2$ où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ est un système de valeurs propres de f...

3) De façon immédiate, $\mathrm{Ker}\,(f_A + 6\mathrm{Id}_E)$ est le plan d'équation $x+y+z = 0$ (matrice de rang 1). $E_{-6}\,(f_A)$ est donc de dimension 2. Or f_A est symétrique car sa matrice dans une base orthonormale (la base canonique !) est symétrique. Le théorème spectral m'indique alors que la normale au plan précédent est nécessairement le deuxième sous-espace propre de f_A (il est par ailleurs clair que le vecteur normal $(1, 1, 1)$ est vecteur propre). Le calcul de $\mathrm{Tr}\,(A)$ ou de l'image du vecteur $(1, 1, 1)$ montre que la deuxième valeur propre est -3. En conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-3, -6\},\ E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1)\right),\ E_{-6}(A)\ /\ x+y+z = 0.}$$

Enfin, les deux méthodes de calcul vues au **2** donnent

$$\boxed{N\,(f_A) = 9.}$$

Partie 1

1) u_a est immédiatement un endomorphisme de E (par linéarité du produit scalaire par rapport à la seconde variable). Son image est égale à $\mathrm{Vect}(a)$ et donc $\mathrm{rg}\, u_a \le 1$. J'ai de plus

$$(u_a(x)|y) = (a|x)(a|y) = (u_a(y)|x)$$

donc u_a est symétrique. Enfin, pour tout x, $(u_a(x)|x) = (a|x)^2 \ge 0$. J'ai donc

$$\boxed{u_a \in T(E).}$$

2) **a)** Comme $a \neq 0$, la famille $\mathcal{B}$ proposée est bien une base. u_a envoie les éléments orthogonaux à a sur 0 et envoie a sur $\|a\|^2 .a$. Par conséquent

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}\,(u_a) = \mathrm{diag}\left(\|a\|^2, 0, \ldots, 0\right).}$$

b) J'en déduis que la matrice dans $\mathcal{B}$ de u_a^2 est $\mathrm{diag}\left(\|a\|^4, 0, \ldots, 0\right)$ et donc que

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,(u_a) = \|a\|^2 \text{ et } \mathrm{Tr}\left(u_a^2\right) = \|a\|^4.}$$

N.B. On peut aussi remarquer que $u_a = \|a\|^2 .p_a$ où p_a est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\,(a)$.

c) La matrice dans $\mathcal{B}$ de $f \circ u_a$ s'obtient en multipliant celle de f à droite par celle de u_a ce qui revient à multiplier la première colonne par $\|a\|^2$ et les autres par 0. Les coefficients diagonaux de la matrice dans $\mathcal{B}$ de $f \circ u_a$ sont donc $\|a\|^2 \alpha, 0, \ldots, 0$, où α est le coefficient supérieur droit de la matrice de f. En décomposant $f(a)$ sur $\mathrm{Vect}(a)$ et son orthogonal, j'obtiens $f(a) = \alpha.a + y$ et ainsi $(f(a)|a) = \alpha \|a\|^2$. Finalement,

$$\boxed{\text{Les coefficients diagonaux de la matrice dans } \mathcal{B} \text{ de } f \circ u_a \text{ sont } (f(a)|a)\,, 0, \ldots, 0.}$$

d) En particulier, le **c)** donne

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,(f \circ u_a) = (f(a)|a).}$$

3) Comme $u \in T(E)$, je note que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(b)$ (car $\mathrm{Vect}(b) \subset \mathrm{Im}(u)$ par construction et ce sont deux droites par hypothèse).

a) Comme $u(b) \in \mathrm{Im}(u)$, je dispose d'un scalaire μ tel que $u(b) = \mu.b$. En prenant le produit scalaire avec b, il vient $(u(b)|b) = \mu \|b\|^2 \geq 0$ par définition de $T(E)$. Or $\|b\|^2 > 0$, d'où $\mu \geq 0$.

$$\boxed{b \text{ est un vecteur propre de } u \text{ associé à une valeur propre } \mu \text{ positive ou nulle.}}$$

b) Soit $x \in E$. $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ d'où k réel tel que $u(x) = k.b$. En prenant le produit scalaire avec b, il vient $k = \dfrac{(u(x)|b)}{\|b\|^2}$. Mais comme u est symétrique, $(u(x)|b) = (x|u(b)) = \mu(x|b)$ et ainsi

$$\boxed{u(x) = \frac{\mu}{\|b\|^2}(b|x).b, \text{ cela pour tout } x \text{ de } E.}$$

c) μ ne peut donc être nul (sinon u le serait) et comme j'ai vu que $\mu \geq 0$, on conclut que

$$\boxed{\mu > 0.}$$

d) Posons $a = \dfrac{\sqrt{\mu}}{\|b\|}.b$. La question **b)** donne $u(x) = (a|x)\,a$ pour tout x de E et donc

$$\boxed{u = u_a.}$$

4) La question **1)** montre que φ va bien de E dans $T(E)$. La question **3)** indique que tout élément non nul de $T(E)$ admet un antécédent. De plus $\varphi(0) = 0$ donc φ est surjective. Mais si a est un vecteur non nul de E (et il y en a puisque $p \geq 1$), je constate que $\varphi(a) = \varphi(-a)$ alors que $a \neq -a$: φ n'est pas injective (ni linéaire !! Ne pas parler de $\mathrm{Ker}\,\varphi\ldots$).

$$\boxed{\varphi \text{ est non injective mais elle est surjective.}}$$

Partie 2

1) $\{\Phi(x),\ x \in E\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (elle contient $N(f - u_0)^2 = N(f)^2$) et minorée par 0. Donc elle possède une borne inférieure.

$$\boxed{m(f) = \inf_{x \in E} \Phi(x) \text{ existe bien.}}$$

2) Je développe par multilinéarité :

$$\Phi(x) = \langle f - u_x, f - u_x \rangle = N(f)^2 - 2\langle f, u_x \rangle + N(u_x)^2$$

Or, $N(u_x^2) = \langle u_x, u_x \rangle = \mathrm{Tr}(u_x^2) = \|x\|^4$ (question **1.2)b)**) et $\langle f, u_x \rangle = \mathrm{Tr}(f \circ u_x) = (f(x)|x)$ (question **1.2)d)**) et donc

$$\boxed{\Phi(x) = N(f)^2 - 2(x|f(x)) + \|x\|^4.}$$

3) Il en résulte, en utilisant la linéarité et la symétrie de f et $\|y\| = 1$

$$\begin{aligned}
h_x(t) &= \Phi(x + ty) \\
&= N(f)^2 - 2(x + ty|f(x) + tf(y)) + \|x + ty\|^4 \\
&= N(f)^2 - 2\left[(x|f(x)) + 2t(x|f(y)) + t^2(y|f(y))\right] + \left(\|x\|^2 + 2t(x|y) + t^2\right)^2 \\
&= t^4 + 4(x|y)t^3 + \left[4(x|y)^2 + 2\|x\|^2 - 2(y|f(y))\right]t^2 \\
&\quad + \left[4\|x\|^2(x|y) - 4(x|f(y))\right]t + N(f)^2 - 2(x|f(x)) + \|x\|^4
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{h_x \text{ est polynomiale de degré 4 et ses coefficients figurent ci-dessus.}}$$

4) f est symétrique donc admet une base orthonormale de vecteurs propres, en vertu du théorème spectral. Quitte à renuméroter les vecteurs d'une telle base $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_p)$, il est possible de se ramener au cas où les valeurs propres respectives $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont classées par ordre croissant.

5) Dans la base $\mathcal{C}$, f est représentée par $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et $f \circ f$ par $\operatorname{diag}\left(\lambda_1^2, \dots, \lambda_p^2\right)$. J'ai donc

$$\boxed{N(f) = \sqrt{\operatorname{Tr}(f \circ f)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2}.}$$

6) Soit $z \in E$ de norme 1 ; il peut s'écrire $z = z_1 e_1 + \cdots + z_p e_p$ avec $z_1^2 + \cdots + z_p^2 = 1$. J'ai alors

$$(z|f(z)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2 \leq \lambda_p \sum_{i=1}^{p} z_i^2 = \lambda_p \tag{1}$$

Cela montre par définition de la borne supérieure que $\alpha \leq \lambda_p$.

En particulier pour $z = e_p$ qui est bien de norme 1, l'inégalité (1) est une égalité. Donc la borne supérieure est un maximum, atteint pour $z = e_p$:

$$\boxed{\alpha = \max_{\|z\|=1} (z|f(z)) = \lambda_p.}$$

De plus, si $(z|f(z)) = \lambda_p$, j'ai $\forall i,\ \lambda_i z_i^2 = \lambda_p z_i^2$ (sinon l'inégalité serait stricte). Dès que $\lambda_i \neq \lambda_p$, j'ai donc $z_i = 0$. z est ainsi combinaison linéaire des e_i tels que $\lambda_i = \lambda_p$. z ainsi un élément de $\operatorname{Ker}(f - \lambda_p.\mathrm{Id}_E)$.
Réciproquement, si z est de norme 1 et élément de $\operatorname{Ker}(f - \lambda_p.\mathrm{Id}_E)$, j'ai $(z|f(z)) = \lambda_p$ par le calcul ci-dessus.

$$\boxed{\text{Les } z \text{ unitaires tels que } (z|f(z)) = \lambda_p \text{ sont ceux de } \operatorname{Ker}(f - \lambda_p.\mathrm{Id}_E).}$$

7) a) Par hypothèse $m(f)$ est atteint en a, donc h_a admet un minimum en 0. Or h_a est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et 0 est un point intérieur à $\mathbb{R}$! Par conséquent

$$\boxed{h_a'(0) = 0.}$$

Or $h_a'(0)$ est le coefficient de t dans l'expression de $h_a(t)$ obtenue au **3)**, donc

$$4\left[\|a\|^2 (a|y) - (a|f(y))\right] = 0,$$

cela pour tout vecteur unitaire y de E.

b) Comme f est symétrique, le résultat précédent donne :

$$\forall y \in E \quad \|y\| = 1 \Rightarrow \|a\|^2 (a|y) = (f(a)|y)\,.$$

Ainsi, $f(a) - \|a\|^2 a$ est orthogonal à tout vecteur unitaire et donc à tout vecteur par homogénéité. Comme $E^\perp = \{0\}$, j'ai prouvé que

$$\boxed{f(a) = \|a\|^2 .a}$$

c) Il suffit de reprendre l'expression obtenue au **3)**. Le terme de degré 1 est nul, le terme constant est égal à $\Phi(a)$ et j'obtiens

$$\Phi(a + t.y) - \Phi(a) = t^2\left[t^2 + 4\,(a|y)\,t + 4\,(a|y)^2 + 2\,\|a\|^2 - 2\,(y|f(y))\right]$$

ce qui donne bien, en reconnaissant la formule du binôme, pour tout vecteur unitaire y,

$$\boxed{\Phi\,(a + t.y) - \Phi\,(a) = t^2\left[\big(t + 2\,(a|y)\,\big)^2 + 2\left(\|a\|^2 - (y|f\,(y))\right)\right].}$$

d) D'après le résultat précédent, si $m(f)$ est atteint en a, alors pour tout y unitaire,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \big(t + 2\,(a|y)\,\big)^2 + 2\left(\|a\|^2 - (y|f\,(y))\right) \geq 0.$$

En choisissant $t = -2\,(a|y)$, j'en déduis $\|a\|^2 - (y|f(y)) \geq 0$. J'ai aussi vu au **b)** que $f(a) = \|a\|^2 .a$.
Réciproquement, si a vérifie les deux conditions, le coefficient de t dans l'expression de $h_a\,(t)$ obtenue au **3)** vaut, du fait que f est symétrique,

$$4\,\|a\|^2\,(a|y) - 4\,(a|f(y)) = 4\,\|a\|^2\,(a|y) - 4\,(f(a)|y) = 0$$

car $f(a) = \|a\|^2 .a$ par hypothèse. L'identité du **c)** est alors vraie pour tout vecteur unitaire y, donc $\Phi(a + t.y) - \Phi(a) \geq 0$ grâce à la seconde condition. Comme $t.y$ décrit E quand t décrit $\mathbb{R}$ et y la sphère unité, Φ atteint donc son minimum $m(f)$ en a.

$$\boxed{\text{L'équivalence est vérifiée.}}$$

8) a) On suppose $\lambda_p \leq 0$. D'après la majoration de la question **6)**, j'ai $(y|f(y)) \leq 0$ pour tout y unitaire. Par conséquent, $a = 0$ vérifie les deux conditions du **7)d)** et donc $m(f) = \Phi(0)$.

Réciproquement, par l'absurde, si $m(f) = \Phi(a)$ et $a \neq 0$, alors a est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\|a\|^2 > 0$ ce qui contredit l'hypothèse $\lambda_p \leq 0$. Donc $a = 0$.

$$\boxed{m(f) = \Phi(a) \text{ si et seulement si } a = 0.}$$

b) f_A n'admettant que des valeurs propres négatives ou nulles, d'après **a)**

$$m(f_A) = \Phi(0) = N(f_A - u_0)^2 = N(f_A)^2.$$

En conclusion, grâce au **3)** des préliminaires,

$$\boxed{m\left(f_A\right) = 81.}$$

9) On suppose que $\lambda_p > 0$.

a) Posons $a = \sqrt{\lambda_p} e_p$. J'ai $f(a) = \sqrt{\lambda_p}\lambda_p e_p = \|a\|^2 .a$. De plus, pour tout y de norme 1, j'ai d'après **6)**

$$(y|f(y)) \leq \lambda_p = \|a\|^2$$

J'en déduis grâce au **7)d)** que

$$m(f) = \Phi(a) = N(f)^2 - 2\,(a|f(a)) + \|a\|^4 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 - 2\lambda_p^2 + \lambda_p^2 = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2$$

soit

$$\boxed{m(f) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2.}$$

b) Je raisonne par double implication.

* Supposons $m(f) = \Phi(x)$. J'ai alors d'après **7)d)** $\lambda_p = (e_p|f(e_p)) \leq \|x\|^2$; comme $\lambda_p > 0$, x est nécessairement non nul. Comme de plus, toujours d'après **7)d),** $f(x) = \|x\|^2 .x$ et donc x est vecteur propre de f. Je dispose donc d'un i tel que $f(x) = \lambda_i .x$. Alors $f(x) = \|x\|^2 .x$ donne $\|x\| = \sqrt{\lambda_i}$ et j'en déduis que $\lambda_p \leq \lambda_i$ ce qui entraîne $\lambda_i = \lambda_p$ (car les λ_k sont rangés par ordre croissant). Ainsi, x est un élément de $\operatorname{Ker}(f - \lambda_p \mathrm{Id}_E)$ de norme $\sqrt{\lambda_p}$.
* Réciproquement, supposons que $\|x\| = \sqrt{\lambda_p}$ et que $f(x) = \lambda_p .x$. J'ai alors immédiatement

  $$f(x) = \lambda_p .x = \|x\|^2 .x.$$

  De plus, la question **6)** indique que, pour tout y unitaire, j'ai

  $$(y|f(y)) \leq \lambda_p = \|x\|^2 .$$

  Le **7)d)** permet de conclure que $m(f) = \Phi(x)$.

En conclusion

$$\boxed{m(f) = \Phi(x) \text{ si et seulement si } x \text{ est un élément de } \operatorname{Ker}(f - \lambda_p \mathrm{Id}_E) \text{ de norme } \sqrt{\lambda_p}.}$$

Partie 3

1) On travaille ici avec une matrice stochastique symétrique.

a) J'ai immédiatement que

$$\boxed{(1, \ldots, 1) \text{ est vecteur propre } M \text{ associé à la valeur propre } 1.}$$

(multiplier M par ce vecteur revient à sommer toutes les colonnes).

b) Avec les notations de l'énoncé, j'ai

$$\lambda x_k = (MX)_k = \sum_{j=1}^{p} m_{k,j} x_j$$

En passant aux valeurs absolues et avec l'inégalité triangulaire,

$$|\lambda| \,.\, |x_k| \leq \sum_{j=1}^{p} |m_{k,j}| \,.\, |x_j| \leq |x_k| \sum_{j=1}^{p} m_{k,j} = |x_k|$$

Comme $X \neq 0$ (vecteur propre), j'ai $|x_k| > 0$ et ainsi

$$\boxed{|\lambda| \leq 1.}$$

c) Nous sommes dans la situation de la partie **2** avec $\lambda_p = 1$ (toutes les valeurs propres sont plus petites que 1 d'après **b)**), qui est valeur propre d'après **a)**). D'après la question **2.9)b)**, un élément de norme 1 de $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ donne un vecteur où Φ atteint son minimum. Donc, grâce au **a)**

$$\boxed{a = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot (1, \ldots, 1) \text{ est un vecteur de } \mathbb{R}^p \text{ tel que } \Phi(a) = m(f_M).}$$

d) J'ai alors avec ce vecteur a

$$m(f_M) = \Phi(a) = N(f_M - u_a)^2$$

et l'endomorphisme $v = u_a$ convient (il est bien dans $T(E)$ d'après **1.1)**).

$$\boxed{u_a \text{ est un élément de } T(E) \text{ vérifiant } [N(f_M - v)]^2 = m(f_M).}$$

e) Comme ici $\|a\| = 1$,

$$\boxed{u_a \text{ est la projection orthogonale sur la droite } \mathrm{Vect}(a).}$$

2) B est de rang 1 et le sous-espace propre $E_0(B)$ est l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_p = 0$. Or B est symétrique réelle donc le théorème spectral m'indique que son autre sous-espace propre est la normale audit hyperplan, dirigée par $(1, \ldots, 1)$, vecteur propre associé à la valeur propre p.

Nous sommes ainsi dans le cadre de la question **2.9)** avec $f = f_B$ et $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$ et $\lambda_p = p$. Donc

$$m(f_B) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2 = 0.$$

De plus, $b = (1, \ldots, 1)$ est un vecteur de norme $\sqrt{p}$ dans $\operatorname{Ker}(f_B - p.\mathrm{Id}_E)$ et, toujours d'après **2.9)**, $m(f_B) = \Phi(b)$, c'est-à-dire que $f_B = u_b$ puisque N est une norme ! Notons que cela pouvait se voir directement !

$$\boxed{m(f_B) = 0 \text{ et } f_B = u_b \text{ pour } b = (1, \ldots, 1).}$$

3) **a)** $C = B - I_p$ et ainsi

$$\boxed{\mathrm{Sp}(C) = \{-1, p-1\}, \quad E_{p-1}(C) = \mathrm{Vect}(1, \ldots, 1), \quad E_{-1}(C) \ / \ x_1 + \cdots + x_p = 0.}$$

b) Je peux à nouveau appliquer le **2.9)**, avec cette fois $\lambda_p = p - 1$ et donc $\lambda_p > 0$ par hypothèse. D'où

$$\boxed{m(f_C) = p - 1.}$$

c) Je cherche alors c de norme $\sqrt{p-1}$ colinéaire à $(1, \ldots, 1)$; donc

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{p-1}{p}} \cdot (1, \ldots, 1) \quad \text{et} \quad w = u_c \text{ conviennent.}}$$

d) Supposons que $N(f_C - u)^2 = m(f_C)$ avec $u \in T(E)$. D'après la surjectivité de l'application φ vue au **1.4)**, je dispose de x dans E tel que $u = u_x$. J'ai alors $m(f_C) = \Phi(x)$ et donc, toujours d'après **2.9)**, $\|x\| = \sqrt{p-1}$ et $x \in \operatorname{Ker}(f - (p-1).\mathrm{Id}_E)$. Comme cet espace est de dimension 1, il y a exactement deux vecteurs x possibles, qui sont opposés. Mais $u_x = u_{-x}$, donc

$$\boxed{w \text{ est unique.}}$$