D.S. 4 *(4 heures)*

Le sujet se compose de deux problèmes indépendants.

Problème A : équation et fonction de Bessel

Dans ce problème, N désigne un élément de $\mathbb{Z}$ et l'on étudie l'équation différentielle dite *"de Bessel"* :

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - N^2\right) y = 0 \qquad (B_N)$$

Partie I

Soit J_N l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$J_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(N\theta - x\sin\theta\right) \mathrm{d}\theta.$$

1) Comparer, pour tout réel x, $J_{-N}(x)$ et $J_N(-x)$. Déterminer $J_N(-x)$ en fonction de $J_N(x)$.

2) Montrer que J_N est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donner les expressions de $J_N'(x)$ et $J_N''(x)$.

3) En utilisant les dérivées des fonctions $\theta \mapsto \sin\left(N\theta - x\sin\theta\right)$ et $\theta \mapsto N + x\cos\theta$, montrer que J_N est solution de (B_N) sur $\mathbb{R}$.

4) Calculer $J_0(0)$, $J_0'(0)$, $J_0''(0)$.

5) **a)** Montrer que, pour tout x réel non nul et pour tout N dans $\mathbb{Z}$,

$$J_{N-1}(x) + J_{N+1}(x) = \frac{2N}{x} \cdot J_N(x).$$

b) Donner, pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{Z}$, une relation entre $J_N'(x)$ et $J_{N-1}(x) - J_{N+1}(x)$.

c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $J_1(x) + J_0'(x) = 0$.

Partie II – Développement en série entière de J_N

1) Développer J_0 en série entière. En donner le terme général et le rayon de convergence.

2) **a)** Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, J_N est également développable en série entière et en donner le rayon de convergence.

b) Montrer que le terme général de cette série entière peut se mettre sous la forme $\alpha_N(k)\,.x^{N+2k}$, où $k \in \mathbb{N}$. Préciser $\alpha_N(k)$.

La chance existe.

Sans cela, comment expliquerait-on la réussite des autres ?

(Marcel ACHARD*)*

Problème B

Dans tout le problème :

- E est un espace euclidien de dimension $p \geq 1$ dans lequel le produit scalaire sera noté $(\cdot|\cdot)$ et la norme associée $\|\cdot\|$.
- $\mathcal{S}(E)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ constitué des endomorphismes symétriques de E.
- $T(E)$ désigne l'ensemble des éléments u de $\mathcal{S}(E)$ de rang inférieur ou égal à 1 et qui vérifient
$$\forall x \in E,\ (u(x)|x) \geq 0$$

Préliminaires

1) Justifier que $T(E)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2) Montrer que l'application
$$(f,g) \in \mathcal{S}(E)^2 \mapsto \langle f,g\rangle = \mathrm{Tr}\,(f \circ g)$$
est un produit scalaire sur $\mathcal{S}\,(E)$ (où Tr désigne la trace).

On notera pour la suite N la norme associée à ce produit scalaire.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé.
Donner les éléments propres de A et calculer $N\,(f_A)$.

Partie 1

Soit $a \in E$ et u_a l'endomorphisme de E défini par
$$\forall x \in E,\ u_a(x) = (a|x).a$$

1) Montrer que $u_a \in T\,(E)$.

2) On suppose dans cette question que $a \neq 0$.
a) Écrire la matrice de u_a dans une base $\mathcal{B}$ de E constituée du vecteur a et d'une base de $\mathrm{Vect}(a)^{\perp}$.
b) Déterminer alors $\mathrm{Tr}\,(u_a)$ et $\mathrm{Tr}\,(u_a \circ u_a)$ en fonction de a.
c) Soit f un endomorphisme de E. Déterminer les éléments diagonaux de la matrice de $f \circ u_a$ dans la base $\mathcal{B}$ définie précédemment.
d) En déduire alors que $\mathrm{Tr}\,(f \circ u_a) = (f(a)|a)$.

3) Soit $u \in T\,(E)$, u non nul et b un vecteur non nul de $\mathrm{Im}\,(u)$.
a) Montrer que b est un vecteur propre de u associé à une valeur propre μ positive ou nulle.
b) Prouver que
$$\forall x \in E,\ u(x) = \frac{\mu}{\|b\|^2}(b|x).b$$
c) En déduire que $\mu > 0$.
d) Montrer qu'il existe au moins un vecteur a de E tel que $u = u_a$.

4) L'application $\varphi : a \in E \mapsto \varphi(a) = u_a \in T\,(E)$ est-elle injective ? Surjective ?

Partie 2

Pour cette partie du problème, f est un endomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ qui est **fixé**.
Pour tout vecteur $x \in E$, on pose

$$\Phi(x) = [N(f - u_x)]^2 \quad \text{et} \quad m(f) = \inf_{x \in E} \Phi(x)$$

Pour tout vecteur x de E et tout vecteur y de E tel que $\|y\| = 1$, soit

$$h_x : t \in \mathbb{R} \mapsto h_x(t) = \Phi(x + t.y)$$

1) Justifier l'existence de $m(f)$.

2) Prouver que $\forall x \in E,\ \Phi(x) = [N(f)]^2 - 2(x|f(x)) + \|x\|^4$.

3) Montrer que h_x est une fonction polynomiale dont on précisera les coefficients.

4) Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E et de réels $(\lambda_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ vérifiant

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad f(e_i) = \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_p$$

5) Calculer alors $N(f)$ à l'aide des réels λ_i, $i \in [\![1,p]\!]$.

6) Exprimer $\alpha = \sup\limits_{z \in E,\ \|z\|=1} (z|f(z))$ à l'aide des réels λ_i, $i \in [\![1,p]\!]$.
Déterminer l'ensemble des vecteurs z de E unitaires tels que $(z|f(z)) = \alpha$.

7) On suppose que $m(f)$ est atteint en $a \in E$.

a) On fixe pour cette question un vecteur y de E de norme 1 et l'on considère la fonction h_a définie au début de la partie **2**. Déterminer $h_a'(0)$.

b) Prouver que $f(a) = \|a\|^2.a$.

c) Prouver que pour tout réel t et tout vecteur y de E de norme 1 :

$$\Phi(a + t.y) - \Phi(a) = t^2 \left[\big(t + 2(a|y)\big)^2 + 2\left(\|a\|^2 - (y|f(y))\right) \right]$$

d) Prouver que

$$m(f) = \Phi(a) \iff \begin{cases} f(a) = \|a\|^2 .a \\ \forall y \in E \quad \text{tel que} \quad \|y\| = 1, \quad (y|f(y)) \leq \|a\|^2 \end{cases}$$

8) **a)** On suppose que $\lambda_p \leq 0$. Prouver que $m(f) = \Phi(a)$ si et seulement si $a = 0$.

b) Déterminer $m(f_A)$ où f_A est l'endomorphisme défini à la question **3)** des préliminaires.

9) On suppose que $\lambda_p > 0$.

a) Démontrer que $m(f) = \sum\limits_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2$.

b) Prouver que $m(f) = \Phi(x) \iff \begin{cases} x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_p \mathrm{Id}_E) \\ \|x\| = \sqrt{\lambda_p} \end{cases}$.

Partie 3

Dans cette partie, on prend $E = \mathbb{R}^p$ euclidien usuel.

1) Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ symétrique et telle que

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad m_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in [\![1,p]\!], \quad \sum\limits_{j=1}^{p} m_{i,j} = 1 \end{cases}$$

On note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associé à la matrice M.

a) Prouver que $\lambda = 1$ est valeur propre de M et donner un vecteur propre associé.

b) Soit λ une valeur propre de M et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

Soit $k \in [\![1,p]\!]$ tel que $|x_k| = \max\left\{|x_j|,\ j \in [\![1,p]\!]\right\}$.
En considérant la k-ième ligne du système $MX = \lambda X$, prouver que $|\lambda| \leq 1$.

c) Déterminer alors un vecteur a de $\mathbb{R}^p$ tel que $\Phi(a) = m(f_M)$ (on ne cherchera pas à calculer la valeur de $m(f_M)$).

d) En déduire l'existence d'un endomorphisme v de $T(E)$ tel que $[N(f_M - v)]^2 = m(f_M)$.

e) Reconnaître la nature géométrique de l'endomorphisme v et donner ses éléments remarquables.

2) Soit $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 et f_B l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ qui lui est canoniquement associé.
Calculer $m(f_B)$.
Trouver un vecteur $b \in \mathbb{R}^p$ tel que $[N(f_B - u_b)]^2 = m(f_B)$.

3) On prend dans cette question $p > 1$.

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et f_C l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associé.

a) Déterminer les éléments propres de la matrice C.

b) Calculer $m(f_C)$.

c) Trouver un vecteur c de $\mathbb{R}^p$ tel que $\Phi(c) = m(f_C)$ et un endomorphisme $w \in T(E)$ tel que $[N(f_C - w)]^2 = m(f_C)$.

d) Cet endomorphisme w est-il unique ?

Fin de l'énoncé.

La chance ne sourit qu'aux esprits bien préparés.

(Louis Pasteur*)*