Problème A

1) <u>*Questions préliminaires*</u>

a) Le développement en série entière de la fonction $h \mapsto \ln(1-h)$ sur $]-1,1[$ est connu :

$$\forall h \in\,]-1,1[\quad \ln(1-h) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{n+1}}{n+1}.$$

Il en résulte, en divisant par $(1-h)-1 = -h$ pour h non nul, et en remarquant que la relation reste vraie pour $h=0$:

$$\boxed{\forall h \in\,]-1,1[\quad f(1-h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n+1}.}$$

b) En vertu des théorèmes opératoires classiques, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$; de plus, d'après **a)**, en notant φ la fonction somme de la série entière $h \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n+1}$, j'ai $f(t) = \varphi(1-t)$ pour tout t de $]0,2[$; il en résulte que f est également $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,2[$. Finalement f est $\mathcal{C}^1$ (car $\mathcal{C}^\infty$!) sur $]0,+\infty[$.

De plus :

$$\forall t \in\,]0,1[\, \cup\,]1,+\infty[\qquad f'(t) = \frac{t-1-t\ln t}{t(t-1)^2}\ ;$$

donc $f'(t)$ est du signe de $\psi(t) = t-1-t\ln t$. Or ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*} \quad \psi'(t) = -\ln t$$

donc ψ est croissante sur $]0,1[$ et décroissante sur $]1,+\infty[$, tandis que $\psi(1) = 0$, donc ψ est négative ; ainsi f' est négative sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$, mais puisque f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, f' est aussi négative en 1 (par continuité).

Par conséquent, les limites de f en 0 et en $+\infty$ étant claires :

$$\boxed{f \text{ décroît sur }]0,+\infty[, \text{ de } +\infty \text{ à } 0.}$$

2) <u>*Étude des variations de f_p*</u>

a) La fonction $t \mapsto t-1-\ln t$ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, nulle en 1, d'où

$$\forall p > 1 \quad \ln p < p-1\ , \text{ donc } \quad \frac{1}{p} < \frac{p-1}{p\ln p} \text{ (en divisant par } p\ln p > 0).$$

De même, pour $t \in\,]0,1[$, $\ln t < t-1$, d'où, avec $t = \dfrac{1}{p}$,

$$\forall p > 1 \quad \ln\frac{1}{p} < \frac{1}{p} - 1\ , \text{ soit } \quad \ln p > \frac{p-1}{p}.$$

En rassemblant les deux résultats précédents :

$$\boxed{\forall p > 1 \quad \frac{1}{p} < \frac{p-1}{p\ln p} < 1.}$$

N.B. : on peut aussi utiliser pour cette question les variations de f étudiées au **1** ; $f(1) > f(p)$ et $f(1/p) > f(1)$ donnent les inégalités souhaitées !

b) f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$; je considère une primitive F de f sur $]0,+\infty[$. F est $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et j'ai : $\forall x > 0 \quad f_p(x) = F(px) - F(x)$. Par conséquent, comme $F' = f$:

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x > 0 \quad f_p'(x) = pf(px) - f(x).}$$

c) En particulier :

$$f_p'\left(\frac{1}{p}\right) = pf(1) - f\left(\frac{1}{p}\right) = p - \frac{\ln\frac{1}{p}}{\frac{1}{p}-1} = p - \frac{p\ln p}{p-1} \quad ; \quad f_p'(1) = pf(p) - f(1) = \frac{p\ln p}{p-1} - 1.$$

En conclusion :

$$\boxed{f_p'\left(\frac{1}{p}\right) = p - \frac{p\ln p}{p-1}\ ;\ f_p'(1) = \frac{p\ln p}{p-1} - 1\ ;\ f_p'\left(\frac{1}{p}\right) + f_p'(1) = p-1.}$$

d) D'après **b)** :

$$\forall x \in \left]0,+\infty\right[\setminus \left\{\frac{1}{p},1\right\} \quad f_p'(x) = p\frac{\ln(px)}{px-1} - \frac{\ln x}{x-1} = \frac{p(x-1)\ln(px)-(px-1)\ln x}{(px-1)(x-1)}$$

Or : $p(x-1)\ln(px)-(px-1)\ln x = (p\ln p)(x-1)-(p-1)\ln x$. Finalement :

$$\boxed{h_p : x \mapsto (p\ln p)(x-1)-(p-1)\ln x \text{ convient.}}$$

Il vient : $\forall x>0 \quad h_p'(x) = p\ln p - \dfrac{p-1}{x} = \dfrac{p\ln p}{x}(x-x_p)$ où $x_p = \dfrac{p-1}{p\ln p}$. Donc :

$$\boxed{h_p' \text{ est négative sur }]0,x_p[\text{ et positive sur }]x_p,+\infty[\text{ , où } x_p = \frac{p-1}{p\ln p}.}$$

De plus,

$$h_p\left(\frac{1}{p}\right) = (p\ln p)\left(\frac{1}{p}-1\right)-(p-1)\ln\frac{1}{p} = 0 \quad \text{et} \quad h_p(1) = 0\ .$$

Enfin, d'après **a)**, $x_p \in \left]\frac{1}{p},1\right[$, d'où, h_p étant décroissante sur $]0,x_p[$, croissante sur $]x_p,+\infty[$:

$$\boxed{h_p \text{ est positive sur } \left]0,\frac{1}{p}\right[, \text{ négative sur } \left]\frac{1}{p},1\right[, \text{ positive sur }]1,+\infty[, \text{ nulle en } \frac{1}{p} \text{ et } 1.}$$

Comme en outre $(px-1)(x-1)$ est positif en dehors de $\left]\frac{1}{p},1\right[$, négatif sur $\left]\frac{1}{p},1\right[$, j'en déduis que :

$$\boxed{f_p \text{ est croissante sur }]0,+\infty[.}$$

3) *Étude de f_p aux bornes de son ensemble de définition*

a) Soit $x \in]0,1/p[$; x et px sont tous deux strictement inférieurs à 1, donc

$$\forall t \in [x,px] \quad -\ln t > 0\ ;\ 0 < 1-px \leq 1-t\ ,\ \text{donc} \quad 0 \leq f(t) = \frac{-\ln t}{1-t} \leq \frac{-\ln t}{1-px}\ ;$$

En intégrant de x à px, j'obtiens

$$\boxed{\forall x \in]0,1/p[\quad 0 \leq f_p(x) \leq \frac{1}{1-px}\int_x^{px}(-\ln t)\,\mathrm{d}t.}$$

Or, toujours pour $x \in]0,1/p[$, la fonction $-\ln$ étant décroissante,

$$\forall t \in [x,px] \quad 0 < -\ln t \leq -\ln x,$$

d'où

$$\forall x \in]0,1/p[\quad 0 \leq f_p(x) \leq \frac{(px-x)(-\ln x)}{1-px} \underset{x\to 0}{\sim} (p-1)(-x\ln x)\,.$$

J'en déduis grâce au théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f_p(x) = 0.}$$

b) f_p étant prolongée par continuité en 0 en posant $f_p(0)=0$, l'étude de la dérivabilité de f_p en 0 revient à l'étude de la limite de $\dfrac{f_p(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0. Or j'obtiens comme ci-dessus, pour $x \in]0,1/p[$:

$$\forall t \in [x,px] \quad -\ln t \geq -\ln(px) > 0\ ;\ 0 < 1-t \leq 1-x\ ,\ \text{donc} \quad f(t) = \frac{-\ln t}{1-t} \geq \frac{-\ln(px)}{1-x}\ ;$$

d'où, en intégrant de x à px :

$$\frac{f_p(x)}{x} \geq \frac{(p-1)(-\ln(px))}{1-x}.$$

Comme ce dernier minorant tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0^+, il en résulte

$$\boxed{f_p \text{ n'est pas dérivable en 0, son graphe admet en } O \text{ une demi-tangente portée par } Oy.}$$

c) De même, pour $x>1$, x et px sont strictement supérieurs à 1 et

$$\forall t \in [x,px] \quad \ln x \leq \ln t \leq \ln(px)\ ;\ 0 < x-1 \leq t-1 \leq px-1,$$

d'où

$$\frac{\ln x}{px-1} \leq f(t) = \frac{\ln t}{t-1} \leq \frac{\ln(px)}{x-1}$$

et, en intégrant de x à px :

$$\boxed{\forall x > 1 \quad \frac{(p-1)\,x\ln x}{px-1} \leq f_p(x) \leq \frac{(p-1)\,x\ln(px)}{x-1}.}$$

Or

$$\frac{(p-1)\,x\ln x}{px-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{p-1}{p}\ln x \quad \text{et} \quad \frac{(p-1)\,x\ln(px)}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} (p-1)\ln(px) \underset{x\to+\infty}{\sim} (p-1)\ln x,$$

donc, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{+\infty} f_p = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_p(x)}{x} = 0$, autrement dit

$\boxed{\lim\limits_{+\infty} f_p = +\infty \text{ ; le graphe de } f_p \text{ admet en } +\infty \text{ une branche parabolique de direction asymptotique } Ox.}$

4) <u>*Calcul de $f_p(1/p)$*</u>

a) D'après **1)a),** en posant $t = 1-h$: $\forall t \in\,]0,1] \quad f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-t)^n}{n+1}$.

Soit $u_n : t \mapsto \dfrac{(1-t)^n}{n+1}$; $\sup\limits_{[1/p,1]} |u_n| = \dfrac{(1-1/p)^n}{n+1} = \dfrac{q^n}{n+1}$. Comme $q \in\,]0,1[$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1/p,1]$; j'en déduis, grâce au **1)a),** que

$$f_p(1/p) = \int_{1/p}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{1/p}^{1} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_{t=1/p}^{t=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Ainsi, en réindexant :

$$\boxed{f_p(1/p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n^2}.}$$

b) Notant que : $\forall n \geq N+1 \quad \frac{q^n}{n^2} \leq \frac{q^n}{(N+1)^2}$, j'obtiens en sommant pour $n \in [\![N+1, P]\!]$, puis en faisant tendre P vers l'infini (les deux séries sont convergentes) :

$$R_N \leq \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} q^n = \frac{1}{(N+1)^2} \frac{q^{N+1}}{1-q}.$$

Autrement dit, comme $1-q = 1/p$:

$$\boxed{R_N \leq \frac{p.q^{N+1}}{(N+1)^2}.}$$

Ce dernier majorant est une fonction décroissante de N ; or pour $p=4$, $q=3/4$ et ma calculatrice m'indique que $R_{17} < 10^{-4}$; elle me donne aussi (avec une erreur de calcul "négligeable" devant 10^{-4}) une valeur approchée de la somme partielle associée, qui est une valeur approchée de $f_4(1/4)$ à 10^{-4} près :

$$\boxed{f_4(1/4) \approx 0{,}9784 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}}$$

Pour la programmation en Python, je calcule les sommes partielles successives à l'aide d'une boucle `while` tant que le majorant du reste obtenu ci-dessus est supérieur à la précision souhaitée.

```
def approx4b(p,eps):
    q=1-1/p
    n=1;s=q
    R=eps #pour entrer dans la boucle
    while R>=eps:
        n+=1
        s+=q**n/n**2
        R=p*q**(n+1)/(n+1)**2
    return n,s
```

c) $f_p(1/p)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(p)$ où $v_n : p \mapsto \dfrac{(1-1/p)^n}{n^2}$; $\sup_{[1,+\infty[} |v_n| = \dfrac{1}{n^2}$, par conséquent la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1,+\infty[$; or, pour tout $n\geq 1$, $\lim_{+\infty} v_n = \dfrac{1}{n^2}$.
Le théorème de la double limite me permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} f_p(1/p) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(=\frac{\pi^2}{6}\right).}$$

5) *Calcul de* $f_p(1)$

a) Le changement de variable $t=\dfrac{1}{1-h}$ (soit $h=1-\dfrac{1}{t}$) donne

$$f_p(1)=\int_1^p f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^q f\left(\frac{1}{1-h}\right)\frac{\mathrm{d}h}{(1-h)^2}=\int_0^q f(1-h)\frac{1}{1-h}\mathrm{d}h,$$

en effet :

$$\forall u<1 \quad f\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{\ln(1/u)}{1/u-1}=\frac{-u\ln u}{1-u}=uf(u).$$

En conclusion :

$$\boxed{f_p(1)=\int_0^q f(1-h)\cdot\frac{1}{1-h}\mathrm{d}h.}$$

b) Comme $q\in\,]0,1[$, j'ai, grâce au **1)c)**,

$$\forall h\in[0,q] \quad f(1-h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-h}=\sum_{n=0}^{\infty}h^n\ ;$$

ces deux séries étant absolument convergentes, pour tout h fixé dans $[0,q]$, le produit de leurs sommes est le produit de Cauchy des deux séries, soit :

$$\forall h\in[0,q] \quad f(1-h).\frac{1}{1-h}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k+1}.h^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nh^n.$$

De plus, pour n fixé dans $\mathbb{N}$, $\sup_{h\in[0,q]}|c_nh^n|=c_nq^n$; c_n étant une somme de $n+1$ termes tous inférieurs à 1, j'ai $c_n\leq n+1$, or $\sum(n+1)q^n$ converge car $|q|<1$ (série dérivée de la série entière géométrique $\sum q^n$, de rayon de convergence 1) ; j'en déduis la convergence normale, donc uniforme, de la série de fonction $\sum w_n$ sur $[0,q]$, où $w_n : h\mapsto c_nh^n$. En conclusion, grâce au **a)** et au théorème d'intégration terme à terme sur un segment, puisque $\displaystyle\int_0^q w_n=\frac{c_nq^{n+1}}{n+1}$,

$$\boxed{f_p(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_nq^{n+1}}{n+1}.}$$

c) Je vérifie que la suite $\left(\dfrac{c_n}{n+1}\right)$ est décroissante : soit $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{c_n}{n+1}-\frac{c_{n+1}}{n+2} &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[(n+2)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}-(n+1)\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k+1}\right]\\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}-(n+1).\frac{1}{n+2}\right]\end{aligned}$$

D'où le résultat puisque $\dfrac{1}{n+2}\leq\dfrac{1}{k+1}$ pour tout k de $[\![0,n]\!]$.
J'en déduis :

$$\forall N\in\mathbb{N} \quad T_N\leq\frac{c_{N+1}}{N+2}\sum_{n=N+1}^{\infty}q^{n+1}.$$

Autrement dit

$$\boxed{T_N\leq\frac{c_{N+1}}{N+2}.\frac{q^{N+2}}{1-q}.}$$

Pour la programmation en Python (ou sur ma calculatrice !), même principe qu'au **4)b)**.

Je prends bien soin de ne pas recalculer c_n ni les sommes partielles à partir de rien à chaque étape. Pour cela j'ajoute à chaque passage dans le corps de la boucle le terme suivant de la somme à la variable `c` (*resp.* `s`) contenant c_n (*resp.* la somme partielle de la série étudiée, de somme $f_p(1)$).

Voici une fonction Python recevant les valeurs de p, ε et renvoyant la première valeur de N pour laquelle ce majorant est plus petit que ε ainsi que la somme partielle correspondante :

```
def approx5c(p,eps):
    q=1-1/p
    n=0;c=1;s=q
    T=eps #pour entrer dans la boucle
    while T>=eps:
        n+=1
        c+=1/(n+1)
        s+=c*q**(n+1)/(n+1)
        T=(c+1/(n+2))/(n+2)*q**(n+2)/(1-q)
    return n,s
```

Il vient :

$$\boxed{\text{Pour } p=4,\ T_N<10^{-4} \text{ lorsque } N\geq 28\ ;\ f_4(1)\approx 1{,}9393 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}}$$

Problème B

Partie I

1) a) (1) et (2) sont clairement vérifiées, (3) découle immédiatement de la formule du binôme :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad P_n(x+y)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}x^k y^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}P_k(x)\,P_{n-k}(y)\,.$$

$$\boxed{\text{La suite } (P_n) \text{ vérifie } (C).}$$

b) Par définition, j'ai pour $n\geq 2$:

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad P_n'(x) &= \frac{1}{n!}(x+n)^{n-1}+\frac{n-1}{n!}x(x+n)^{n-2}=\frac{(x+n)^{n-2}}{n!}\left[x+n+(n-1)x\right]\\ &= \frac{1}{(n-1)!}(x+1)(x+1+n-1)^{n-2}=P_{n-1}(x+1)\end{aligned}$$

Notons que cette relation subsiste pour $n=1$, puisque $P_2(x)=\dfrac{1}{2}x(x+2)$, donc $P_2'(x)=x+1$; or $P_1(x)=x$ pour tout x par définition. Finalement :

$$\boxed{\forall n\geq 1\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad P_n'(x)=P_{n-1}(x+1).}\qquad (R)$$

Ici aussi, (1) et (2) se vérifient trivialement. Je montre (3) par récurrence sur n. Soit $\mathcal{P}_n$ le prédicat :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad P_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}P_k(x)\,P_{n-k}(y)\,.$$

* $\mathcal{P}_0$ est banal.
* Je suppose que $n\geq 1$ est tel que $\mathcal{P}_{n-1}$ soit vrai ; je fixe x dans $\mathbb{R}$; j'ai d'après la relation (R), comme $P_0'=0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\sum_{k=0}^{n}P_k(x)\,P_{n-k}(y)\right)=\sum_{k=0}^{n}P_k(x)\,P_{n-k}'(y)=\sum_{k=0}^{n-1}P_k(x)\,P_{n-1-k}(y+1)=P_{n-1}(x+y+1)\,,$$

cette dernière égalité provenant de l'hypothèse de récurrence. Donc, toujours d'après (R), les deux fonctions $y\mapsto\sum_{k=0}^{n}P_k(x)\,P_{n-k}(y)$ et $y\mapsto P_n(x+y)$ ont la même dérivée sur $\mathbb{R}$. Or, par définition de la suite (P_n), $P_j(0)$ est nul pour tout $j\geq 1$; j'en déduis que ces deux fonctions coïncident en 0, où elle valent $P_n(x)$. Elle sont finalement égales :

$$\forall y\in\mathbb{R}\quad P_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}P_k(x)\,P_{n-k}(y)\,,\quad \text{cela pour tout } x \text{ réel.}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}_n$ est bien vérifié, ce qui achève cette démonstration par récurrence.

$$\boxed{\text{La suite } (P_n) \text{ vérifie } (C).}$$

2) a) Prenant $x = y = 0$ dans (3), j'obtiens

$$\forall n \geq 1 \quad P_n(0) = 2P_n(0) + \sum_{k=1}^{n-1} P_k(0) P_{n-k}(0) \quad \text{(cette dernière somme étant nulle pour } n=1\text{)}.$$

Il en résulte, par une récurrence forte et néanmoins immédiate, que

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geq 1,\ P_n(0) = 0.}$$

b) (3) me donne, pour $n = 1$ et $y = 1$, sachant que $P_0 = 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_1(x+1) = P_1(x) + P_1(1).$$

Il en résulte, par une récurrence immédiate, que $P_1(n) = nP_1(1)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Le polynôme $P_1(X) - XP_1(1)$ admet donc une infinité de racines : c'est le polynôme nul. Et comme par hypothèse P_1 n'est pas nul, c'est que $P_1(X) = a_1 X$ avec $a_1 = P_1(1) \neq 0$. En particulier :

$$\boxed{\deg P_1 = 1.}$$

(On peut aussi montrer que P_1' est constant en dérivant $P_1(x+y) = P_1(x) + P_1(y)$.)

c) D'après **b)**, P_1 est bien de la forme $a_1 X$, avec $a_1 \in \mathbb{R}^*$. Je reprends l'idée précédente ; (3) me donne, toujours avec $y = 1$ et sachant que $P_0 = 1$

$$\forall n \geq 1 \quad P_n(X+1) - P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P_{n-k}(1) P_k(X) = a_1 P_{n-1}(X) + \sum_{k=0}^{n-2} P_{n-k}(1) P_k(X).$$

Or, pour P polynôme donné non constant de degré d, le polynôme $P(X+1) - P(X)$ est de degré $d-1$; plus précisément, si $a_d X^d$ est le terme dominant de P, celui de $P(X+1) - P(X)$ est $d a_d X^{d-1}$ (d'après la formule du binôme, sachant que $\binom{d}{d-1} = d$). J'en déduis, à nouveau grâce à une récurrence forte sur n, que P_n est de degré n (puisque a_1 est non nul). De plus, compte tenu de la remarque précédente, le coefficient dominant a_n de P_n vérifie la relation de récurrence $na_n = a_1 a_{n-1}$, soit $a_n = \dfrac{a_1}{n} a_{n-1}$, d'où par une dernière récurrence :

$$\boxed{\text{Pour tout } n,\ P_n \text{ est de degré } n, \text{ de coefficient dominant } \frac{a_1^n}{n!}.}$$

d) En dérivant (3) par rapport à y, pour x fixé, puis en prenant $y = 0$, j'obtiens

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P_n'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} P_k(x).}$$

(Le terme d'indice n a disparu puisque $P_0(y)$ est une constante.)

3) a) Ce résultat est clair : (C') définit par récurrence une unique suite de polynômes, puisque P_0 est donné et, pour tout $n \geq 1$, P_n est *la* primitive qui s'annule en 0 du polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} P_k$.

$$\boxed{\text{Il existe une unique suite de polynômes } (P_n) \text{ vérifiant } (C').}$$

b) Pour x fixé, la fonction $t \mapsto v_n(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et la relation de l'énoncé n'est autre que son développement limité à l'ordre n en 0 ; or la formule de Taylor-Young me donne

$$v_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k v_n}{\partial t^k}(x,0)\, t^k + t^n \varepsilon_n(x,t).$$

$\pi_k(x)$ est nécessairement le coefficient de t^k dans ce développement limité, mais *a priori* celui-ci dépend de n. Il me reste à montrer qu'il n'en est rien. Je vérifie pour cela, $n \geq 1$ étant fixé, que

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \frac{\partial^k v_n}{\partial t^k}(x,0) = \frac{\partial^k v_k}{\partial t^k}(x,0).$$

Pour $k = n$, il n'y a rien à faire ! Pour $1 \leq k < n$, je remarque que

$$v_n(x,t) = v_k(x,t) \exp\left(x \sum_{j=k+1}^{n} a_j t^j\right) = v_k(x,t)\, w(t) \quad \text{où} \quad w : t \mapsto \exp\left(t^{k+1} x \sum_{j=k+1}^{n} a_j t^{j-k-1}\right).$$

w est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $w(t) \underset{t \to 0}{=} 1 + O\left(t^{k+1}\right) \underset{t \to 0}{=} 1 + o\left(t^k\right)$, donc, par unicité du développement limité, fourni par la formule de Taylor-Young, j'ai

$$\forall i \in [\![1, k]\!] \quad w^{(i)}(0) = 0.$$

J'en déduis, grâce à la formule de Leibniz,

$$\frac{\partial^k v_n}{\partial t^k}(x,0)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{\partial^{k-i} v_k}{\partial t^{k-i}}(x,0)\,w^{(i)}(0)=\frac{\partial^k v_k}{\partial t^k}(x,0)\,,\text{ ce qu'il fallait démontrer.}$$

Enfin, $\pi_0(x)=v_1(x,0)=1$. En conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Il existe une (unique) suite } (\pi_n)_{n\geq 0} \text{ vérifiant la condition, définie par}\\ \pi_0=1 \quad\text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N}^* \quad \pi_n(x)=\dfrac{1}{n!}\dfrac{\partial^n v_n}{\partial t^n}(x,0).\end{array}}$$

J'ai déjà $\pi_0=1$. De $v_1(x,t)=e^{a_1xt}\underset{t\to 0}{=}1+a_1xt+o\left(t^2\right)$ et de l'unicité de ce développement limité, pour x fixé, je déduis $\pi_1=a_1X\neq 0$ puisque $a_1\neq 0$ par hypothèse.
Enfin, d'après la définition de v_n, j'ai, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad v_n(x+y,t)=v_n(x,t)\,v_n(y,t)\,.$$

En dérivant n fois par rapport à t grâce à la formule de Leibniz et en prenant les valeurs en $t=0$, j'obtiens d'après l'expression de π_n :

$$\pi_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\pi_k(x)\,\pi_{n-k}(y)\,.$$

La suite (π_n) vérifie donc (C) ; alors d'après les questions **1)** et **2)** ci-dessus, elle vérifie également (C') :

$$\boxed{\text{La suite } (\pi_n)_{n\geq 0} \text{ vérifie } (C) \text{ et } (C').}$$

D'après l'unicité de la suite (P_n) vérifiant (C'), établie au **a),** j'ai donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\quad \pi_n=P_n.}$$

On a vu dans les questions **1)** et **2)** ci-dessus que $(C)\Rightarrow(C')$ (avec $a_n=P_n'(0)$) et on vient de voir que si (P_n) vérifiait (C') (pour une certaine suite (a_n)), alors elle coïncidait avec une suite (π_n) qui vérifie (C) ! Finalement,

$$\boxed{(C) \text{ et } (C') \text{ sont équivalentes.}}$$

Partie II

1) a) Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ l'assertion :

$$\forall k\leq n\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad \forall t\in\,]-R,R[\quad \left|t^nP_n'(x)\right|\leq \widetilde{f}(t)\,e^{|x|\widetilde{f}(t)}\quad\text{et}\quad \left|t^nP_n(x)\right|\leq e^{|x|\widetilde{f}(t)}.$$

* $\mathcal{P}_0$ est vraie : en effet $P_0'(x)=0$ et $P_0(x)=1$, tandis que $\widetilde{f}$ est à valeurs positives.
* Je suppose que $n\geq 1$ est tel que $\mathcal{P}_{n-1}$ soit vraie ; je fixe x dans $\mathbb{R}$ et t dans $]-R,R[$; j'ai d'après (C')

$$\begin{aligned}\left|t^nP_n'(x)\right| &\leq |t|^n\sum_{k=0}^{n-1}|a_{n-k}|\,|P_k(x)|=\sum_{k=0}^{n-1}|a_{n-k}|\,|t|^{n-k}\left|t^kP_k(x)\right|\\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}|a_{n-k}|\,|t|^{n-k}\,e^{|x|\widetilde{f}(t)}\ \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.}\end{aligned}$$

Or la série définissant $\widetilde{f}$ est à termes positifs, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}|a_{n-k}|\,|t|^{n-k}=\sum_{j=1}^{n}|a_j|\,|t|^j\leq\widetilde{f}(t)\,.$$

D'où

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \forall t\in\,]-R,R[\quad \left|t^nP_n'(x)\right|\leq\widetilde{f}(t)\,e^{|x|\widetilde{f}(t)}.$$

Comme $n\geq 1$, j'ai $P_n(0)=0$ et P_n de classe $\mathcal{C}^1$ (!) donc

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad P_n(x)=\int_0^x P_n'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Pour $x\geq 0$ et $t\in\,]-R,R[$, j'en déduis :

$$\left|t^nP_n(x)\right|\leq\int_0^x\left|t^nP_n'(u)\right|\mathrm{d}u\leq\int_0^x\widetilde{f}(t)\,e^{u\widetilde{f}(t)}\mathrm{d}u=\left[e^{u\widetilde{f}(t)}\right]_{u=0}^{u=x}=e^{x\widetilde{f}(t)}-1\leq e^{x\widetilde{f}(t)}.$$

De même, pour $x<0$ et $t\in\,]-R,R[$, j'ai :
$$|t^nP_n(x)|\le\int_x^0\left|t^nP_n'(u)\right|\mathrm{d}u\le\int_x^0\widetilde{f}(t)\,e^{-u\widetilde{f}(t)}\mathrm{d}u=\left[-e^{-u\widetilde{f}(t)}\right]_{u=x}^{u=0}=-1+e^{-x\widetilde{f}(t)}\le e^{-x\widetilde{f}(t)}.$$
J'ai ainsi
$$\forall x\in\mathbb{R}\quad\forall t\in\,]-R,R[\quad|t^nP_n(x)|\le e^{|x|\widetilde{f}(t)}.$$
Par conséquent, $\mathcal{P}_n$ est bien vérifiée, ce qui achève cette démonstration par récurrence (forte).
$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall x\in\mathbb{R}\quad\forall t\in\,]-R,R[\quad|t^nP_n'(x)|\le\widetilde{f}(t)\,e^{|x|\widetilde{f}(t)}\quad\text{et}\quad|t^nP_n(x)|\le e^{|x|\widetilde{f}(t)}.}$$

b) Soit $\rho\in\,]0,R[$; je viens de voir (en prenant $t=\rho$) que la suite $(P_n(x)\,\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (par $e^{|x|\widetilde{f}(\rho)}$). Le lemme d'Abel m'indique alors que le rayon de convergence R_0 de la série entière $\sum P_n(x)\,t^n$ est au moins égal à ρ, cela pour tout ρ dans $]0,R[$. Il en résulte que $R_0\ge R$.

Le même raisonnement s'applique à $\sum P_n'(x)\,t^n$.

$$\boxed{\text{Les séries entières en } t\quad\sum P_n(x)\,t^n \text{ et } \sum P_n'(x)\,t^n \text{ ont un rayon de convergence au moins égal à } R.}$$

2) a) Je note pour tout n q_n la fonction $x\mapsto P_n(x)\,t^n$; les q_n sont des fonctions polynomiales, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$! Soit $M\in\mathbb{R}^{+*}$ et r fixé tel que $|t|<r<R$ (il en existe puisque $|t|<R$ par hypothèse). J'ai grâce au **1)a)**
$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall x\in[-M,M]\quad\left|q_n'(x)\right|=\left|t^nP_n'(x)\right|=\left|r^nP_n'(x)\right|\left|\frac{t}{r}\right|^n\le\widetilde{f}(r)\,e^{|x|\widetilde{f}(r)}\left|\frac{t}{r}\right|^n\le\widetilde{f}(r)\,e^{M\widetilde{f}(r)}\left|\frac{t}{r}\right|^n.$$
Ce dernier majorant ne dépend pas de x et est le terme général d'une série géométrique convergente d'après le choix (convenable) de r. Par conséquent :
$$\boxed{\sum q_n' \text{ converge normalement sur } [-M,M].}$$

b) Avec les notations précédentes, S_t n'est autre que la fonction somme de la série de fonctions $\sum q_n$; cette série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ (d'après **1)b),** puisque $|t|<R$). D'après la question précédente, pour $M>0$ fixé, $\sum q_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[-M,M]$. Ainsi le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions permet de conclure que S_t est $\mathcal{C}^1$ sur $[-M,M]$, cela pour tout $M>0$ d'où finalement :
$$\boxed{S_t \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } S_t' : x\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)\,t^n.}$$
Or, d'après (C')
$$\forall n\in\mathbb{N}\quad P_n'(x)=\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}P_k(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}P_k(x)\ \text{ en posant } a_0=0.$$
D'où
$$\forall x\in\mathbb{R}\quad S_t'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}P_k(x)\right)t^n.$$
Je reconnais le produit de Cauchy des deux séries entières de la variable t de sommes respectives $f(t)$ et $S_t(x)$ ($|t|<R$ et ces deux séries entières ont un rayon de convergence au moins égal à R d'après **1)b)**). Finalement :
$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad S_t'(x)=f(t)\,S_t(x).}$$

c) Ainsi S_t est-elle solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle scalaire d'ordre 1 $y'=f(t)\,y$ (où la variable est x, $f(t)$ étant une constante !) ; comme $S_t(0)=1$, il en résulte
$$\boxed{S_t(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)\,t^n=e^{xf(t)}.}$$

3) À la suite réelle $(a_n)_{n\ge1}$ donnée, j'associe la suite de polynômes $(P_n)_{n\ge0}$ définie par (C') ; elle vérifie aussi (C) d'après l'étude du **I** et $a_n=P_n'(0)$ pour tout $n\ge1$. Alors le début de cette partie **II** s'applique et donc, d'après **2)c),**
$$\boxed{e^{xf(t)}=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)\,t^n \text{ pour } |t|<R, \text{ la suite } (P_n) \text{ vérifiant } (C)\ !}$$

4) a) Ici $a_1=1$ et $a_n=0$ pour tout $n\ge2$, d'où
$$\boxed{f(t)=t\quad\text{et}\quad R=+\infty.}$$

b) Ici, (P_n) vérifie (C') avec $a_1 = a_2 = 1$ et $a_n = 0$ pour tout $n \geq 3$, d'où

$$\boxed{f(t) = t + t^2 \quad \text{et} \quad R = +\infty.}$$

c) Ici, une récurrence facile montre que (P_n) vérifie (C') avec $a_n = (-1)^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$, d'où

$$\boxed{f(t) = \frac{t}{1+t} \quad \text{et} \quad R = 1.}$$

Partie III

1) a) J'ai ici :

$$\forall n \geq 2 \quad a_n = P_n'(0) = P_{n-1}(1) = \frac{n^{n-2}}{(n-1)!},$$

d'où, pour t non nul fixé,

$$\frac{\left|a_{n+1}t^{n+1}\right|}{|a_n t^n|} = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-1}}|t| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}|t| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e.|t|.$$

Grâce à la règle de d'Alembert, j'en déduis que

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \textstyle\sum a_n t^n \text{ est } R = 1/e.}$$

b) D'après **II-2)**, j'ai, en reprenant les mêmes notations, pour $|t| < R$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)\,t^n = S_t'(x) = f(t)\,e^{xf(t)}$$

D'autre part, d'après la relation vérifiée par les (P_n), j'ai, comme $P_0' = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)\,t^n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n'(x)\,t^n = \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x+1)\,t^n = t\sum_{p=0}^{\infty} P_p(x+1)\,t^p = te^{(x+1)f(t)}.$$

Je compare ces deux expressions et je simplifie par $e^{xf(t)}$ pour obtenir :

$$\boxed{te^{f(t)} = f(t), \text{ pour tout } t \text{ tel que } |t| < R.}$$

2) a) $\psi : u \mapsto ue^{-u}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\psi' : u \mapsto (1-u)\,e^{-u}$, d'où compte tenu de l'étude banale en $\pm\infty$:

$$\boxed{\psi : u \mapsto ue^{-u} \text{ croît de } -\infty \text{ à } 1/e \text{ sur }]-\infty, 1], \text{ puis décroît de } 1/e \text{ à } 0 \text{ sur } [1, +\infty[.}$$

b) f est définie sur $]-1/e, 1/e[$ et vérifie

$$\forall t \in\,]-1/e, 1/e[\quad \psi[f(t)] = t.$$

Soit m l'antécédent de $-1/e$ par ψ (il est unique, élément de $\mathbb{R}^{-*}$ d'après les variations et le signe de ψ). Toujours d'après les variations de ψ, j'ai nécessairement $f(]-1/e, 0]) =]m, 0]$ (tout réel négatif admet un unique antécédent par ψ). Par contre, les éléments de $]0, 1/e[$ admettent deux antécédents, l'un dans $]0, 1[$, l'autre dans $]1, +\infty[$. Comme f est strictement croissante sur $]0, 1/e[$ (comme somme d'une série entière dont tous les coefficients sont positifs), elle définit une bijection de $]0, 1/e[$ sur $f(]0, 1/e[)$ dont la bijection réciproque est également croissante. Du sens de variation de ψ, je déduis donc que

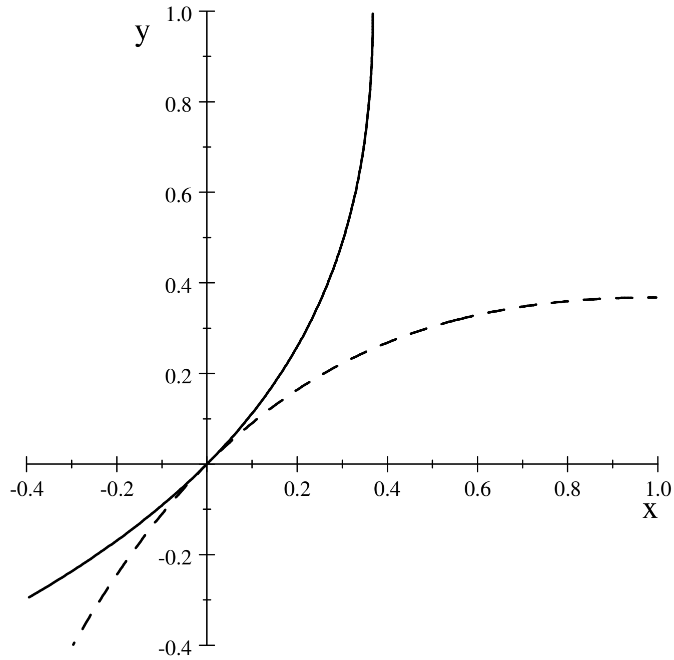
$$\boxed{f \text{ est la bijection réciproque de } \varphi : \begin{array}{ccc}]m, 1[& \to &]-1/e, 1/e[\\ u & \mapsto & ue^{-u} \end{array}.}$$

c) Je viens de voir que

$$\boxed{f \text{ croît de } m \text{ à } 1 \text{ sur }]-1/e, 1/e[\text{ et } \varphi \text{ croît de } -1/e \text{ à } 1/e \text{ sur }]m, 1[.}$$

Voici l'allure des graphes (f se prolonge par continuité à $[-1/e, 1/e]$ en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[-1/e, 1/e[$, non dérivable en $1/e$, le graphe admettant en ce point une tangente parallèle à Oy).

Les graphes sont symétriques par rapport à la bissectrice du repère. Celui de φ est en pointillés.



d) La calculatrice fournit

$$\psi\,(-0.2785) < -1/e \quad \text{et} \quad \psi\,(-0.278) > -1/e,$$

donc

$$\boxed{m \approx -0.278 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

Lemme éternel du CNRS

La théorie, c'est quand ça ne marche pas mais que l'on sait pourquoi.
La pratique, c'est quand ça marche mais que l'on ne sait pas pourquoi.
Quand la théorie rejoint la pratique, ça ne marche pas et l'on ne sait pas pourquoi.