D.S. 3 *(4 heures)*

Le sujet se compose de deux problèmes indépendants.

Problème A

Dans tout le problème, p est un nombre réel strictement supérieur à 1. On pose $q = \dfrac{p-1}{p}$.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln t}{t-1} & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$.

On pose enfin, pour tout x strictement positif,

$$f_p(x) = \int_x^{px} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) *Questions préliminaires*

a) Justifier brièvement la relation : $\forall h \in\,]-1,1[\quad f(1-h) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n+1}$.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et donner son tableau de variations.

2) *Étude des variations de f_p*

a) Montrer que :

$$\forall p > 1 \quad \frac{1}{p} < \frac{p-1}{p\ln p} < 1.$$

b) Montrer que f_p est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x > 0 \quad f_p'(x) = pf(px) - f(x).$$

c) Calculer $f_p'\left(\dfrac{1}{p}\right)$, $f_p'(1)$ et montrer que

$$f_p'\left(\frac{1}{p}\right) + f_p'(1) = p-1.$$

d) Déterminer une fonction h_p, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, telle que :

$$\forall x \in\,]0,+\infty[\, \setminus \left\{\frac{1}{p}, 1\right\} \quad f_p'(x) = \frac{h_p(x)}{(px-1)(x-1)}.$$

Étudier le signe de $h_p'(x)$; calculer $h_p\left(\dfrac{1}{p}\right)$ et $h_p(1)$.

En déduire le signe de $h_p(x)$, puis le sens de variation de f_p.

3) *Étude de f_p aux bornes de son ensemble de définition*

a) Montrer que

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{p}\right[\quad |f_p(x)| \leq \frac{1}{1-px}\int_x^{px} (-\ln t)\,\mathrm{d}t.$$

En déduire la limite de f_p en 0.

b) Étudier la dérivabilité de f_p en 0.

c) Montrer que

$$\forall x > 1 \quad \frac{(p-1)\,x\ln x}{px-1} \leq f_p(x) \leq \frac{(p-1)\,x\ln(px)}{x-1}.$$

En déduire la limite de f_p en $+\infty$ ainsi que la nature de la branche infinie.

4) *Calcul de $f_p(1/p)$*

a) À l'aide des questions préliminaires, montrer que :

$$f_p(1/p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n^2} \qquad \text{(on rappelle que } q = \frac{p-1}{p}\text{).}$$

b) Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{q^n}{n^2}$. Montrer que : $R_N \leq \frac{p \cdot q^{N+1}}{(N+1)^2}$.

En déduire à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de $f_4\left(\frac{1}{4}\right)$ à 10^{-4} près, en expliquant la méthode utilisée.

Donner une fonction Python recevant comme paramètre p et ε et renvoyant une valeur approchée de $f_p(1/p)$ à ε près, en appliquant la méthode précédente.

c) Que vaut la limite de $f_p\left(\frac{1}{p}\right)$ lorsque p tend vers $+\infty$?

5) *Calcul de $f_p(1)$*

a) Montrer que :

$$f_p(1) = \int_0^q f(1-h) \cdot \frac{1}{1-h} \mathrm{d}h.$$

b) En utilisant le produit de Cauchy de deux séries, en déduire que

$$f_p(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n q^{n+1}}{n+1} \quad \text{où} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

c) Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $T_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{c_n q^{n+1}}{n+1}$. Montrer que : $T_N \leq \frac{c_{N+1}}{N+2} \cdot \frac{q^{N+2}}{1-q}$.

En déduire une valeur approchée de $f_4(1)$ à 10^{-4} près en expliquant la méthode utilisée.

Donner une fonction Python recevant comme paramètre p et ε et renvoyant une valeur approchée de $f_p(1)$ à ε près, en appliquant la méthode précédente.

Problème B

L'objet de ce problème est l'étude des suites de polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n\geq 0}$ satisfaisant aux 3 conditions (C) suivantes :

$$(C) \quad \left| \begin{array}{ll} (1) & P_0(x) = 1 \\ (2) & P_1 \text{ n'est pas le polynôme nul} \\ (3) & \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad P_n(x+y) = \sum\limits_{k=0}^{n} P_k(x) P_{n-k}(y) \end{array} \right.$$

On ne distingue pas un polynôme et la fonction polynôme associée.

Partie I

Dans cette partie, après deux exemples de suites $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifiant (C), on en donne une construction générale.

1) a) La suite $(P_n)_{n\geq 0}$ est définie par : $P_0(x) = 1$; $P_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ pour $n \geq 1$.

Montrer que cette suite vérifie (C).

b) La suite $(P_n)_{n\geq 0}$ est définie par : $P_0(x) = 1$; $P_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot x(x+n)^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Vérifier, pour $n \geq 1$, la relation : $P'_n(x) = P_{n-1}(x+1)$. En déduire que cette suite $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifie (C).

2) $(P_n)_{n\geq 0}$ désigne maintenant une suite quelconque vérifiant (C).

a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $P_n(0) = 0$.

b) Montrer que P_1 est de degré 1.

c) On pose $P_1(x) = a_1 x$. Montrer que P_n est de degré n et expliciter son terme de degré n en fonction de a_1.

d) Pour tout $n \geq 1$, on pose $a_n = P_n'(0)$. Établir, pour tout $n \geq 1$, la relation

$$P_n'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} P_k(x).$$

3) Réciproquement, on se donne une suite réelle $(a_n)_{n\geq 1}$, avec $a_1 \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe une suite et une seule $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifiant les 3 conditions (C') suivantes :

$$(C') \quad \left| \begin{array}{lll} (1) & P_0(x) = 1 & \\ (2) & P_n(0) = 0 & \text{pour } n \geq 1 \\ (3) & P_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} P_k(x) & \text{pour } n \geq 1 \end{array} \right.$$

b) Soit : $u_n(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ et $v_n(x,t) = e^{x u_n(t)}$.

Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(\pi_n)_{n\geq 0}$ tels que, pour tout entier n donné,

$$v_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \pi_k(x) t^k + t^n \varepsilon_n(x,t),$$

où, pour x fixé, $\varepsilon_n(x,t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0.

Montrer que la suite $(\pi_n)_{n\geq 0}$ vérifie (C) et (C').

En déduire que $\pi_n = P_n$ pour tout n et que (C) et (C') sont équivalentes.

Partie II

Dans cette partie, sauf en **II.3)**, on considère une suite (P_n) de polynômes vérifiant les conditions équivalentes (C) et (C') et possédant la propriété suivante : la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$, où $(a_n)_{n\geq 1}$ est la suite définie en **I** par $a_n = P_n'(0)$, a un rayon de convergence R non nul (éventuellement infini).

On se propose d'étudier $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) t^n$. Pour $|t| < R$, on pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n \quad \text{et} \quad \widetilde{f}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \left(|t|\right)^n$$

1) **a)** Établir, pour x réel, $|t| < R$ et $n \geq 0$, les majorations suivantes :

$$\left|t^n P_n'(x)\right| \leq \widetilde{f}(t) e^{|x|\widetilde{f}(t)} \quad \text{et} \quad \left|t^n P_n(x)\right| \leq e^{|x|\widetilde{f}(t)}$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser les conditions (C').

b) En déduire que, pour tout x réel fixé, les séries entières en t

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) t^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} P_n'(x) t^n$$

ont un rayon de convergence au moins égal à R.

2) On suppose, dans cette question, t fixé dans $]-R, R[$ et x variable.

a) Montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n'(x) t^n$ de la variable x est normale sur tout intervalle fermé $[-M, M]$ de $\mathbb{R}$.

(On pourra considérer par exemple $r^n \cdot |P_n'(x)| \cdot \left|\dfrac{t}{r}\right|^n$, r étant convenablement choisi.)

b) On pose $S_t(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\, t^n$. Montrer que S_t est une fonction de x dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une relation entre la dérivée $S_t'(x)$ de cette fonction de x, $S_t(x)$ et $f(t)$.

c) En déduire :

$$S_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\, t^n = e^{xf(t)}.$$

3) Réciproquement, on se donne une série entière $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$, avec $a_1 \neq 0$, de rayon de convergence non nul R, de somme $f(t)$.

Montrer que la fonction de t, $t \mapsto e^{xf(t)}$, définie pour $|t| < R$, est, pour tout réel x fixé, développable en série entière sous la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\, t^n,$$

où la suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifie (C).

4) Déterminer $f(t)$ et R dans les cas suivants :

a) $P_0(x) = 1$; $P_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ pour $n \geq 1$.

b) $P_0(x) = 1$; $P_1(x) = x$; pour $n \geq 2$, $P_n'(x) = P_{n-2}(x) + P_{n-1}(x)$ et $P_n(0) = 0$.

c) $P_0(x) = 1$; pour $n \geq 1$, $P_n'(x) = P_{n-1}(x) - P_{n-1}'(x)$ et $P_n(0) = 0$.

Partie III

Dans cette partie, on reprend la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ du **I-1).b).**

On lui associe la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que $a_n = P_n'(0)$.

On rappelle la relation $P_n'(x) = P_{n-1}(x+1)$ pour $n \geq 1$.

1) **a)** Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$.

Soit, pour $|t| < R$, $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$.

b) Exprimant $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P_n'(x)\, t^n$ de deux façons différentes, en fonction de x et de $f(t)$, montrer que l'on a,

$$\text{pour } |t| < R, \quad te^{f(t)} = f(t).$$

2) **a)** Étudier les variations de la fonction de la variable réelle u définie par $u \mapsto ue^{-u}$.

b) En déduire que f est la fonction réciproque d'une fonction simple φ.

c) Étudier les variations de f et φ et construire leurs courbes représentatives.

d) Calculer la borne inférieure m de f à 10^{-3} près.

Fin de l'énoncé.