Exercice 1

1) Dans l'esprit du théorème du programme officiel, je résous le **2.** et j'en déduirai le **1.**

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est continue, positive et décroissante sur $[3, +\infty[$: en effet f est dérivable sur cet intervalle et

$$\forall t \in [3, +\infty[\quad f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} < 0 \quad \text{car} \quad t > e.$$

Soit k entier, $k \geq 4$; f est décroissante sur $[k-1, k]$, d'où

$$\forall t \in [k-1, k] \quad f(k) \leq f(t) \leq f(k-1).$$

J'en déduis par croissance de l'intégrale, $[k-1, k]$ étant d'amplitude 1,

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k-1)$$

d'où, en posant $w_k = \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k)$ et en soustrayant $f(k)$ aux trois membres,

$$0 \leq w_k \leq f(k-1) - f(k).$$

Pour n entier, $n \geq 4$, il en résulte par sommation et télescopage

$$0 \leq \sum_{k=4}^{n} w_k \leq f(3) - f(n) \leq f(3).$$

Donc la série $\displaystyle\sum_{k \geq 4} w_k$ est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées. Donc cette série converge. Or

$$\sum_{k=4}^{n} w_k = \int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=4}^{n} f(k) = \int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t - u_n + f(2) + f(3)$$

L'intégrale se calcule aisément grâce à une primitive :

$$\int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_3^n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2$$

d'où

$$u_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 - \sum_{k=4}^{n} w_k + f(2) + f(3).$$

Par conséquent, du fait de la convergence de $\sum w_k$,

$$u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C = -\frac{1}{2}(\ln 3)^2 - \sum_{k=4}^{\infty} w_k + f(2) + f(3).$$

En particulier, la suite de terme général $u_n - \dfrac{1}{2}(\ln n)^2$ est bornée, or $\dfrac{1}{2}(\ln n)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par conséquent

$$u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \underset{n\to\infty}{=} o\left((\ln n)^2\right),$$

autrement dit

$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}(\ln n)^2.}$$

2) Avec les notations ci-dessus,

$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + o(1).}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je sépare les termes de rangs pair et impair :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \sum_{q=1}^{n} \frac{\ln(2q)}{2q} - \sum_{q=1}^{n} \frac{\ln(2q-1)}{2q-1}$$

puis j'ajoute et je retranche aussitôt les termes de rang pair :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = 2 \cdot \sum_{q=1}^{n} \frac{\ln(2q)}{2q} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} \quad \text{(je retrouve tous les termes avec un signe moins !).}$$

Enfin je simplifie par 2 et je réorganise la première somme grâce à $\ln(2q) = \ln 2 + \ln q$:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \sum_{q=1}^{n} \frac{\ln 2}{q} + \sum_{q=1}^{n} \frac{\ln q}{q} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k}.$$

Il reste à constater que q est un indice muet que je remplace par k. La 2[e] somme se simplifie !

$$\boxed{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}.}$$

L'expression précédente s'écrit aussi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \ln 2 \cdot \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q} + u_n - u_{2n}$.

Je peux alors utiliser les développements asymptotiques :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln 2 \cdot \left[\ln n + \gamma + o(1)\right] + \left[\frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + o(1)\right] - \left[\frac{1}{2}(\ln 2n)^2 + C + o(1)\right].$$

Soit, après développement de $(\ln 2 + \ln n)^2$, simplifications et regroupement des $o(1)$:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} \underset{n\to\infty}{=} \gamma \ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + o(1).$$

Nous venons de montrer que la suite des sommes partielles de rang pair de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k \ln k}{k}$ converge vers $S = \ln 2\left(\gamma - \dfrac{\ln 2}{2}\right)$. Comme le terme $\dfrac{(-1)^{2n+1}\ln(2n+1)}{2n+1}$ est de limite nulle, la suite des sommes partielles de rang impair converge également vers S. Il en résulte classiquement que la suite des sommes partielles converge vers S. En conclusion, ladite série converge (ce qui pouvait s'obtenir rapidement grâce au théorème spécial des séries alternées) et sa somme vaut S.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \ln 2\left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right) \approx 0,16.}$$

Exercice 2

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, j'ai par définition : $w_n = \ln \dfrac{(n+1)^\lambda u_{n+1}}{n^\lambda u_n} = \ln \dfrac{n+a}{n+b} + \lambda \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Or : $\ln \dfrac{n+a}{n+b} = \ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{b}{n}\right) = \dfrac{a-b}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

d'où : $w_n = \dfrac{a-b+\lambda}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Le dernier terme est celui d'une série absolument convergente (par comparaison à une série de Riemann), donc la série de terme général w_n est de même nature que celle de terme général $\dfrac{a-b+\lambda}{n}$; ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum w_n \text{ converge si et seulement si } \lambda = b - a.}$$

2) Si je choisis justement $\lambda = b - a$, la série $\sum w_n = \sum (v_{n+1} - v_n)$ converge, donc la suite de terme général v_n converge aussi, vers un certain réel ℓ (car $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} w_n = v_{N+1} - v_1$) ; alors par continuité de la fonction exponentielle, la suite de terme général $e^{v_n} = n^{b-a} u_n$ converge vers $L = e^\ell > 0$:

$$\boxed{\text{Il existe } L > 0 \text{ tel que } u_n \sim \frac{L}{n^{b-a}}.}$$

Les séries de termes généraux u_n et $\dfrac{L}{n^{b-a}}$ étant de plus à termes positifs, elles sont de même nature.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } b - a > 1.}$$

3) J'ai par hypothèse $b-a-1>0$ et d'après la question précédente, $nu_n \sim \dfrac{L}{n^{b-a-1}}$; donc :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} nu_n = 0.}$$

Par définition : $\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{N} z_n = \sum_{n=0}^{N}(n+1)u_{n+1} - \sum_{n=0}^{N} nu_n = (N+1)u_{N+1} - 0u_0$, d'où, d'après le résultat précédent :

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} z_n = 0.}$$

Par ailleurs, je peux écrire, par définition de la suite (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)u_{n+1} = (n+b)u_{n+1} - (b-1)u_{n+1} = (n+a)u_n - (b-1)u_{n+1},$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = au_n - (b-1)u_{n+1}$. J'en déduis, toutes les séries considérées étant convergentes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = a\sum_{n=0}^{\infty} u_n - (b-1)\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}, \text{ soit : } 0 = a\sum_{n=0}^{\infty} u_n - (b-1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n - u_0\right).$$

Il en résulte :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{b-1}{b-a-1}\cdot u_0.}$$

Problème : endomorphismes cycliques

Partie I

1) Supposons h projecteur cyclique dans E de dimension n. Soit C_a^p un cycle de h.

Comme $h^2(a) = h(a)$ et les p éléments de C_a^p sont distincts, nécessairement $p \leq 2$; de plus C_a^p engendre E, donc $1 \leq n \leq p \leq 2$.

- <u>Si $n=1$</u>, alors h est soit l'application nulle (Im $h = \{0\}$), soit l'identité (Im $h = E$).
  L'application nulle est cyclique, d'ordre 2 : un cycle est $\{a, 0\}$, pour tout $a \neq 0$.
  L'identité est cyclique, d'ordre 1 : un cycle est $\{a\}$ avec $a \in E$ et $a \neq 0$.
- <u>Si $n=2$</u>, alors $p=2$ et pour que $\{a, h(a)\}$ soit un cycle, il faut et il suffit que $(a, h(a))$ soit une base de E (car $h^2(a) = h(a)$).
  Dans le cas où h est l'application nulle ou l'application identique, h ne vérifie pas cette condition.
  Le cas où $\dim \mathrm{Im}\ h = 1$, c'est à dire lorsque h est un projecteur sur une droite, alors h est cyclique d'ordre 2 et $\forall a \in E \setminus (\mathrm{Im}\ h \cup \mathrm{Ker}\, h) \quad C_a^2 = \{a, h(a)\}$ est un cycle de h.

2) **a)** J'ai $\forall k \in [\![1, n-1]\!] \quad f(e_k) = e_{k+1}$, d'où je déduis facilement que $f^k(e_1) = e_{k+1}$ pour $k = 1, \ldots, n-1$.
$C_{e_1}^n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une partie génératrice de E formée d'éléments distincts.
De plus $f^n(e_1) = f^{n-1}(e_1) \in C_{e_1}^n$, donc

$$\boxed{f \text{ est cyclique d'ordre } n \text{ et } C_{e_1}^n \text{ est un cycle de } f.}$$

Comme $f(e_{n-1}) = f(e_n) = e_n$, f n'est pas injective, donc $\dim \mathrm{Ker}\, f \geq 1$, d'où d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}\, f \leq n-1$. D'autre part, les $n-1$ premières colonnes sont linéairement indépendantes de façon évidente, d'où $\mathrm{rg}\, f \geq n-1$. Finalement,

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = n-1 \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1.}$$

A étant triangulaire inférieure, je lis ses valeurs propres sur la diagonale : ce sont 0 d'ordre $n-1$ et 1 d'ordre 1. Je sais que le sous-espace propre relatif à la valeur propre simple 1 est de dimension 1. Ainsi, f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f$ est de dimension $n-1$, c'est à dire :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } n = 2.}$$

b) Posons $a = -\sum_{i=1}^{n} e_i$; $g(a) = -\sum_{i=1}^{n} g(e_i) = -e_2 - \cdots - e_n - a = e_1$, $g^2(a) = e_2, \ldots,\ g^n(a) = e_n$. Ainsi $C_a^{n+1} = \{a, g(a) \ldots, g^n(a)\} = \{a, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une partie génératrice de E formée d'éléments distincts.
De plus, $g^{n+1}(a) = g\left(g^n(a)\right) = g(e_n) = a$, donc C_a^{n+1} est un cycle de g et

$$\boxed{g \text{ est cyclique d'ordre } n+1.}$$

On ne change pas le rang d'un système de vecteurs en les permutant. En considérant les vecteurs colonnes de B, je vois que $\text{rg}(B) = \text{rg}\,(a, e_2, \ldots, e_n) = n$ (matrice triangulaire).

Le calcul du polynôme caractéristique de B donne : $\chi_g\,(t) = t^n + \cdots + t + 1$ (classique, cf. le D.L. 2) qui admet n racines distinctes (les racines $(n+1)$-ièmes de 1 autres que 1).

Plus simplement, je remarque que, comme $g^{n+1}\,(a) = a$, j'ai : $\forall j \in [\![0, n]\!] \quad g^{n+1}\left(g^j\,(a)\right) = g^j\,(a)$. Donc les endomorphismes g^{n+1} et Id_E coïncident sur la famille génératrice C_a^{p+1}. Par linéarité, il en résulte que $g^{n+1} = \text{Id}_E$. Autrement dit $X^{n+1} - 1$ est un polynôme annulateur de g, or il est scincé à racines simples (les racines $(n+1)$-ièmes de 1 !). En conclusion

$$\boxed{g \text{ est diagonalisable.}}$$

3) Vu en cours (Chap. 2. §**III-4**)... Soit $\mathcal{P}_f$ l'ensemble des polynômes annulateurs de f ; d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\mathcal{P}_f$ contient au moins un polynôme non nul, donc l'ensemble $\mathcal{E}$ des degrés des éléments non nuls de $\mathcal{P}_f$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, je dispose donc de $d = \min \mathcal{E}$ et d'un élément non nul B de $\mathcal{P}_f$ de degré d. Quitte à diviser B par son coefficient dominant, je peux supposer B unitaire et je note $\mathcal{M}_B$ l'ensemble des multiples de B, dans $\mathbb{C}\,[X]$.

Je sais que, pour tout $Q \in \mathbb{C}\,[X]$, $(BQ)\,(f) = B\,(f) \circ Q\,(f) = 0$ car $B\,(f) = 0$ par construction. Donc $BQ \in \mathcal{P}_f$; il en résulte que $\mathcal{M}_B \subset \mathcal{P}_f$.

Réciproquement, je considère $A \in \mathcal{P}_f$ et j'effectue la division euclidienne de A par B : $A = BQ + R$, où $\deg R < \deg B$. J'ai d'une part $A\,(f) = 0$ par hypothèse, d'autre part $A\,(f) = (BQ)\,(f) + R\,(f) = R\,(f)$, d'où $R \in \mathcal{P}_f$. J'en déduis que $R = 0$ (sinon $\deg R$ serait un élément de $\mathcal{E}$ strictement inférieur à d !). Ainsi $A = BQ \in \mathcal{M}_B$.

Finalement $\mathcal{P}_f$ est l'ensemble des multiples du polynôme unitaire B. Et si B_1 est un autre polynôme unitaire vérifiant cette propriété, j'ai B multiple de B_1, B_1 multiple de B et B, B_1 tous deux unitaires, d'où $B_1 = B$.

4) a) Dans l'espace vectoriel E de dimension n, toute famille génératrice a au moins n éléments, or un cycle de f est une partie génératrice à p éléments, donc

$$\boxed{p \geq n.}$$

b) Soit $C_a^p = \left\{a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\right\}$ un cycle de f : C_a^p engendre E, donc $\text{rg}\, C_a^p = n$ et $\text{Im}\ f$ est engendré par les images par f des éléments de C_a^p, donc :

$$\text{rg}\, f = \text{rg}\left(f(a), \ldots, f^p(a)\right) \geq \text{rg}\left(f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\right) \geq n - 1$$

(en effet $E = \text{Vect}\,(a) + \text{Vect}\left(f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\right)$). En conclusion

$$\boxed{\text{rg}\, f \geq n - 1.}$$

5) L'existence de m résulte du fait qu'une famille libre a au plus n éléments. De plus $m \leq p$ car $m \leq n \leq p$.

a) Montrons par récurrence sur k que $f^k(a) \in \text{Vect}\,\mathcal{F}$ pour $k \geq m$.

Je sais que $f^m(a)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$, donc $\underline{f^m(a) \in \text{Vect}\,\mathcal{F}}$.

Supposons que $f^k(a) \in \text{Vect}\,\mathcal{F}$. Alors $f^k(a)$ peut s'écrire $\sum\limits_{i=0}^{m-1} \lambda_i.f^i(a)$, donc

$$f^{k+1}(a) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i.f^{i+1}(a) = \lambda_{m-1}.f^m(a) + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i.f^{i+1}(a)$$

qui est dans $\text{Vect}\,\mathcal{F}$ comme somme d'éléments de $\text{Vect}\,\mathcal{F}$.

b) Il en résulte que $E = \text{Vect}\left(a, \ldots, f^{p-1}(a)\right) = \text{Vect}\left(a, \ldots, f^{m-1}(a)\right)$, donc $\left(a, \ldots, f^{m-1}(a)\right)$ libre et génératrice de E est une base de E, ce qui impose $m = n$. Donc

$$\boxed{\left(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a)\right) \text{ est une base de } E.}$$

c) D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_f est un multiple de Π_f ; de plus $\deg \chi_f = n$.

Et le **b)** montre que f ne saurait admettre un polynôme annulateur de degré strictement inférieur à n (cela donnerait une relation de dépendance linéaire entre des vecteurs d'une base !). Donc $\deg \Pi_f \geq n$.

En résumé, χ_f et Π_f sont unitaires, de même degré n et Π_f divise χ_f, donc

$$\boxed{\Pi_f = \chi_f.}$$

6) On suppose ici que f est bijectif et que C_a^p est un cycle de f.

Je sais qu'il existe $j \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $f^p(a) = f^j(a)$.

Supposons $j \geq 1$: en appliquant f^{-1}, j'obtiens $f^{p-1}(a) = f^{j-1}(a)$ avec $0 \leq j-1 < p-1$, ce qui contredit que les éléments de C_a^p sont distincts.

Ainsi $j = 0$ et donc

$$\boxed{f^p(a) = a.}$$

7) $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$; $\chi_f = X^2 - (\operatorname{Tr} A)\, X + \det A = X^2 - \beta X - \alpha$; $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\beta \\ \beta & \alpha + \beta^2 \end{pmatrix}$.

On suppose que 1 n'est pas racine de χ_f, c'est-à-dire que $\alpha + \beta \neq 1$.

Je suppose que f est cyclique d'ordre 2, je dispose alors d'un vecteur v de $\mathbb{R}^2$ tel que $C_v^2 = \{v, f(v)\}$ soit un cycle d'ordre 2 de f. Nécessairement v et $f(v)$ sont non nuls (car C_v^2 engendre $\mathbb{R}^2$) et $f^2(v) \in \{v, f(v)\}$ (car C_v^2 est stable par f). Alors $f^2(v) = f(v)$ signifierait que $f(v)$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre 1, ce qui est exclu par hypothèse. Donc $f^2(v) = v$, d'où $f^2\big(f(v)\big) = f(v)$ et donc $f^2 = \operatorname{Id}_E$ (ce sont deux endomorphismes qui coïncident sur une base !). Par conséquent $A^2 = I_2$, d'où $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. Mézalor $\chi_A = X^2 - 1$ admettrait 1 comme racine !

En conclusion :

$$\boxed{\text{Avec la condition “1 n'est pas valeur propre de } f\text{”, } f \text{ ne peut pas être cyclique d'ordre 2.}}$$

Partie II – Caractérisation des endomorphismes cycliques inversibles

1) On suppose que $f \in GL(E)$ et que C_a^p est un cycle pour f.

a) D'après **I.6**, $f^p(a) = a$, d'où : $\forall k \in [\![0, p-1]\!] \quad f^p\left(f^k(a)\right) = f^k\left(f^p(a)\right) = f^k(a)$.

Ainsi f^p et Id_E coïncident sur une partie génératrice de E, donc sont égales, d'où $f^p = \operatorname{Id}_E$.

(*L'implication* $(f^p(a) = a \Rightarrow f^p = \operatorname{Id}_E)$ *reste valable si* $f \notin GL(E)$.)

f annule donc le polynôme $X^p - 1 = \prod_{k=0}^{p-1} (X - e^{2ik\pi/p})$, scindé dans $\mathbb{C}[X]$ à racines simples, donc

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

b) Comme Π_f divise tout polynôme annulateur de f, $\Pi_f = \chi_f$ divise $X^p - 1$.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $r \in [\![1, p-1]\!]$ tel que Π_f divise $X^r - 1$.

Alors $X^r - 1$ annule aussi f, donc $f^r = \operatorname{Id}_E$. En particulier $f^r(a) = a$ avec $1 \leq r \leq p-1$, ce qui contredit le fait que les éléments de C_a^p sont distincts. Ainsi :

$$\boxed{p \text{ est le plus petit des entiers naturels non nuls } r \text{ tels que } \chi_f \text{ divise } X^r - 1.}$$

2) **a)** Par hypothèse, χ_f divise $X^p - 1 = \prod_{k=0}^{p-1} (X - \omega_k)$ où les $\omega_k = e^{2ik\pi/p}$ sont distincts deux à deux.

Par conséquent χ_f est scindé à racines simples et Π_f également, puisque Π_f divise χ_f d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Or toutes les racines de χ_f, étant des valeurs propres de f, sont des racines de Π_f puisque Π_f annule f. Comme Π_f et χ_f sont unitaires, je peux conclure :

$$\boxed{\Pi_f = \chi_f\ .}$$

b) Je viens de voir que f admet n valeurs propres distinctes, par conséquent :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

c) Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres de f et soit $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de vecteurs propres de f avec $f(v_k) = \lambda_k . v_k$ pour $k = 1, \ldots, n$.

Si $x = \sum_{n=1}^{n} x_i . v_i$ avec les x_i tous non nuls, alors $f^k(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i . f^k(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i^k . v_i$.

La matrice de la famille $\big(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\big)$ dans la base $\mathcal{V}$ est $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_1\lambda_1 & \cdots & x_1\lambda_1^{n-1} \\ x_2 & x_2\lambda_2 & \cdots & x_2\lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n\lambda_n & & x_n\lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$.

Par multilinéarité, $\det M = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \times V_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où V_n est un déterminant de Vandermonde non nul car les λ_i sont deux à deux distincts. Comme les x_i sont non nuls, $\det M \neq 0$ et par suite

$$\boxed{\big(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\big) \text{ est une base de } E.}$$

d) Puisque χ_f est de degré n et divise $X^p - 1$, alors $n \leq p$ et donc la famille $\big(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\big)$ engendre aussi E.

Comme $f^p(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\lambda_i)^p.v_i = \sum_{i=1}^{n} x_i.v_i = x$ car les λ_i sont des racines p-ièmes de l'unité, j'en déduis que C_x^p est stable par f. Il reste à montrer que tous les éléments de C_x^p sont distincts. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe k et ℓ distincts dans $[\![0, p-1]\!]$ tels que $f^k(x) = f^\ell(x)$. Par symétrie je peux supposer $k < l$. f étant bijective par hypothèse, je peux appliquer $(f^{-1})^k$, ce qui donne $f^{\ell-k}(x) = x$.

Posons $r = \ell - k$. J'ai $r \geq 1$ et $f^r(x) = x$, donc $\sum_{i=1}^{n} x_i.{\lambda_i}^r.v_i = \sum_{i=1}^{n} x_i.v_i$. Comme $\mathcal{V}$ est une base et les x_i non nuls, j'obtiens que : $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_i^r = 1$. Ainsi tous les facteurs $X - \lambda_i$ de la décomposition de χ_f en facteurs irréductibles sont des facteurs de $X^r - 1$, donc χ_f divise $X^r - 1$ avec $1 \leq r < p$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur f et p. En résumé,

$$\boxed{C_x^p \text{ est un cycle de } f \text{ et } f \text{ est cyclique.}}$$

3) **a)** Soit $U = A + I_3$. $U^2 = 3.U$, donc $(A + I_3)^2 = 3\,(A + I_3)$, d'où $A^2 - A - 2\,I_3 = 0$. Donc

$$\boxed{\text{Le polynôme } Q = X^2 - X - 2 \text{ annule } f.}$$

b) D'après **a)**, Π_f est de degré au plus 2, tandis que χ_f est de degré 3, donc $\Pi_f \neq \chi_f$. Ainsi d'après **I-5)** :

$$\boxed{f \text{ n'est pas cyclique.}}$$

Partie III – Caractérisation des endomorphismes cycliques non inversibles

1) On suppose que C_a^p est un cycle de f et que f n'est pas inversible.

a) D'après **I.4.b**, $\mathrm{rg} f \geq n - 1$, donc d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f \leq 1$. Or $f \notin GL(E)$, donc f est non injective : $\dim(\operatorname{Ker} f) \geq 1$. Ainsi

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 1.}$$

b) Si j'avais $f^p(a) = a$, je montrerais comme au **II.1.a.** que $f^p = \mathrm{Id}_E$ et par suite f serait inversible. Donc

$$\boxed{f^p(a) \neq a.}$$

Comme $f^p(a) \in C_a^p$, je dispose de $k \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $f^p(a) = f^k(a)$ (k est unique par définition d'un cycle).

c) $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$, $f^k\big(f^i(a)\big) = f^i\big(f^k(a)\big) = f^i\big(f^p(a)\big) = f^p\big(f^i(a)\big)$, donc f^k et f^p prennent les mêmes valeurs sur les éléments d'une partie génératrice. Par linéarité

$$\boxed{f^p = f^k.}$$

d) f étant non injective, 0 est valeur propre de f. Notons j l'ordre de multiplicité de 0 dans χ_f ; $j \in \mathbb{N}^*$ car 0 est racine de χ_f. Ainsi χ_f se factorise en $\chi_f = X^j Q$ avec $Q(0) \neq 0$. De plus f annule le polynôme $X^p - X^k = X^k(X^{p-k} - 1)$, donc $\Pi_f = \chi_f$ divise $X^k(X^{p-k} - 1)$; d'où $j \leq k$ et Q divise $X^{k-j}\left(X^{p-k} - 1\right)$. Mais $Q\,(0) \neq 0$, donc Q divise $X^{p-k} - 1$.

$$\boxed{\chi_f = X^j Q \text{ où } j \in \mathbb{N}^* \text{ et } Q \text{ divise } X^{p-k} - 1.}$$

2) Si Q est constant, alors $Q = 1$ d'après les coefficients dominants et $j = n$. Ainsi $\chi_f = \Pi_f = X^n$, donc par définition du polynôme minimal, $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$; autrement dit, f est nilpotent d'indice n. Je vérifie alors classiquement que, si $a \notin \operatorname{Ker}(f^{n-1})$, la famille $\big(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a)\big)$ est libre, donc c'est une base et par suite, une famille génératrice de E.

Je constate alors que $C_a^{n+1} = \{a, f(a), \dots, f^{n-1}(a), 0_E\}$ est un cycle de f.

$$\boxed{\text{Si } Q \text{ est constant, alors } f \text{ est cyclique.}}$$

3) a) f annule $\Pi_f = X^j Q$ et $X^q - 1$ est un multiple de Q, donc f annule le polynôme $X^j(X^q - 1)$. Ainsi $(f^q - 1) \circ f^j = 0$, c'est-à-dire que $\operatorname{Im} f^j \subset \operatorname{Ker}(f^q - \operatorname{Id}_E)$. De plus, si $x \in \operatorname{Ker} f^j \cap \operatorname{Ker}(f^q - \operatorname{Id}_E)$, j'ai $f^j(x) = 0$ et $f^q(x) = x$, d'où $f^{qj}(x) = 0$ et $f^{qj}(x) = x$, donc $x = 0$. En conclusion

$$\boxed{\operatorname{Im} f^j \subset \operatorname{Ker}(f^q - \operatorname{Id}_E) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} f^j \cap \operatorname{Ker}(f^q - \operatorname{Id}_E) = \{0\}.}$$

Grâce au théorème du rang, l'inclusion ci-dessus montre que $\dim \operatorname{Ker} f^j + \dim \operatorname{Ker}(f^q - \operatorname{Id}_E) \geq n$, d'où, comme ces deux sous-espaces sont en somme directe,

$$\boxed{E = \operatorname{Ker} f^j \oplus \operatorname{Ker}(f^q - \operatorname{Id}_E).}$$

b) Sachant que le noyau de tout polynôme en f est stable par f, j'en déduis immédiatement que

$$\boxed{E_1 = \operatorname{Ker}(f^j) \text{ et } E_2 = \operatorname{Ker}(f^q - \operatorname{Id}_E) \text{ sont stables par } f.}$$

Je peux donc considérer les endomorphismes f_1 et f_2 induits par f sur E_1 et E_2.

4) a) Pour montrer que f_2 est cyclique d'ordre q, je me ramène au résultat obtenu au **II.2)**.

$\forall x \in E_2 = \operatorname{Ker}(f^q - \operatorname{Id}_E) \quad f^q(x) = x$, d'où $f_2^q(x) = x$, donc $f_2^q = \operatorname{Id}_{E_2}$ et $\underline{f_2 \in GL(E_2)}$.

$X^q - 1$ étant un polynôme annulateur de f_2, toutes les valeurs propres de f_2 sont des racines q-ièmes de 1. Or je sais que χ_{f_2} divise χ_f qui lui-même divise $X^j(X^q - 1)$. J'en déduis que les racines de χ_{f_2} sont toutes simples (elles sont non nulles et les racines de $X^q - 1$ sont simples. Par conséquent $\underline{\chi_{f_2} \text{ divise } X^q - 1}$.

Supposons qu'il existe $r \in [\![1, q-1]\!]$ tel que χ_{f_2} divise $X^r - 1$. Comme f_2 annule χ_{f_2}, *a fortiori* f_2 annule $X^r - 1$, donc $f_2^r = \operatorname{Id}_E$.

Tout élément $x \in E$ se décompose en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, donc $f^j(x_1) = 0$ et $f^r(x_2) = x_2$.

Ainsi $\left[f^j \circ (f^r - \operatorname{Id}_E)\right](x) = (f^r - \operatorname{Id}_E)\left(f^j(x_1)\right) + f^j\left((f^r - \operatorname{Id}_E)(x_2)\right) = 0$.

Je viens de montrer que $f^j \circ (f^r - \operatorname{Id}_E) = 0$, donc $\Pi_f = X^j Q$ divise $X^j(X^r - 1)$, ainsi Q divise $X^r - 1$ ce qui contredit l'hypothèse faite sur Q. Je peux donc conclure, grâce au **II.2)** que :

$$\boxed{f_2 \text{ est cyclique d'ordre } q.}$$

b) Si $C_{a_2}^q$ est un cycle de f_2, alors $a_2 \in E_2$, donc $f_2^q(a_2) = a_2$.

Il en résulte que la suite $\left(f^j(a_2), \ldots, f^{j+q-1}(a_2)\right)$ se déduit de la suite $\left(a_2, \ldots, f^{q-1}(a_2)\right)$ par permutation circulaire, donc est aussi génératrice de E_2 :

$$\boxed{\left(f^j(a_2), \ldots, f^{j+q-1}(a_2)\right) \text{ engendre } E_2.}$$

5) En se plaçant dans une base adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$, f est représentée par une matrice diagonale par blocs $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ et je sais que A_1 et A_2 sont les matrices de f_1 et f_2 dans les bases choisies respectivement dans E_1 et E_2.

a) J'obtiens, pour t dans $\mathbb{C}$, en notant $n_i = \dim E_i$ pour $i = 1, 2$:

$$\chi_f(x) = \det(tI_n - A) = \det(tI_{n_1} - A_1) \cdot \det(tI_{n_2} - A_2) = \chi_{f_1}(t) \cdot \chi_{f_2}(t)$$

d'où

$$\boxed{\chi_f = \chi_{f_1} \chi_{f_2}.}$$

Donc $\chi_{f_1} \chi_{f_2} = X^j Q$. Or f_1 est nilpotent, donc $\chi_{f_1} = X^{n_1}$ (0 est la seule valeur propre de f_1 !).

De plus, puisque 0 n'est racine ni de χ_{f_2} ni de Q, j'ai nécessairement $j = n_1$. Ainsi

$$\boxed{\dim E_1 = j.}$$

b) Si j'avais $f_1^{j-1} = 0$, en reprenant un calcul effectué au **III.4.a**, je trouverais que le polynôme $X^{j-1}(X^q - 1)$ annule f, par suite $\Pi_f = X^j Q$ diviserait $X^{j-1}(X^q - 1)$, ce qui est impossible. Donc

$$\boxed{f_1^{j-1} \neq 0.}$$

c) En considérant $a_1 \in E_1 \setminus \operatorname{Ker} f_1^{j-1}$, je vérifie classiquement que

$$\boxed{\left(a_1, f(a_1), \ldots, f^{j-1}(a_1)\right) \text{ est une base de } E_1.}$$

6) $a = a_1 + a_2$ et $f^j(a_1) = 0$, donc :

$$\begin{aligned} C_{a_1+a_2}^{j+q} &= \left\{a, f(a), \ldots, f^{j+q-1}(a)\right\} \\ &= \left\{a_1 + a_2,\ f(a_1) + f(a_2),\ \ldots,\ f^{j-1}(a_1) + f^{j-1}(a_2),\ f^j(a_2), \ldots, f^{j+q-1}(a_2)\right\} \end{aligned}$$

J'ai déjà vu que $\left\{ f^j(a_2), \ldots, f^{j+q-1}(a_2)\right\} = \left\{a_2,\ \ldots, f^{j-1}(a_2)\right\}$.

J'en déduis que $\operatorname{Vect} C_a^{j+q}$ contient $\left\{a_1, f(a_1), \ldots, f^{j-1}(a_1)\right\}$, donc E_1.

Comme $\operatorname{Vect} C_a^{j+q}$ contient par ailleurs $\left\{ f^j(a_2), \ldots, f^{j+q-1}(a_2)\right\}$, donc E_2, je peux conclure :

$$\underline{C_a^{j+q} \text{ engendre } E}.$$

De plus ses éléments sont <u>distincts</u> car d'une part $a_1, f(a_1), \ldots, f^j(a_1)$ sont distincts, non nuls, dans E_1 et d'autre part $f^j(a_2), \ldots, f^{j+q-1}(a_2)$ distincts, non nuls, dans E_2, tandis que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Enfin $f^{j+q}(a) = f^{j+q}(a_2) = f^j(a_2)$, donc C_a^{j+q} est <u>stable</u> par f.

En résumé,

$$\boxed{C_a^{j+q} \text{ est un cycle de } f.}$$

7) $\chi_f = X^2\,(X - j)$ et $\Pi_f = \chi_f$ car $X\,(X - j)$ n'annule pas f.

Ici $Q = X - j$ divise $X^3 - 1$, mais pas $X - 1$, ni $X^2 - 1$, donc les hypothèses précédentes son vérifiées avec $q = 3$ et $j = 2$.

Je peux donc construire comme au **6)** un cycle C_a^5 avec a de la forme $a_1 + a_2$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ j & j & j^2 \end{pmatrix}$: je choisis $a_1 \in E_1 = \operatorname{Ker} f^2$, hyperplan défini par l'équation $x + y + j\,z = 0$ et tel que $a_1 \notin \operatorname{Ker} f$, par exemple $\underline{a_1 = (j, 0, -1)}$.

$A^3 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ j^2 & j^2 & 0 \end{pmatrix}$: je choisis $a_2 \in E_2 = \operatorname{Ker}\left(f^3 - \mathrm{Id}_E\right)$, par exemple $\underline{a_2 = e_3 = (0, 0, 1)}$.

Ainsi

$$a = (j, 0, 0),\ f(a) = (j, -j, j),\ f^2(a) = (0, 0, j^2) = j^2.e_3,\ f^3(a) = (0, 0, 1) = e_3,\ f^4(a) = (0, 0, j)$$

et

$$\boxed{C_a^5 \text{ est un cycle de } f.}$$

Je vérifie que $f^5(a) = (0, 0, j^2) = f^2(a)$ comme trouvé au **6)** !