D.S. 2 *(4 heures)*

Exercice 1

1) À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

2) Montrer qu'il existe C dans $\mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + o(1)$.

On admet que la constante d'Euler γ vérifie $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.

3) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}.$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k}.$$

Exercice 2

a, b, u_0 étant des nombres réels strictement positifs donnés, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} \cdot u_n.$$

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln\left(n^\lambda u_n\right)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.

À l'aide d'un développement limité, montrer que l'on peut choisir λ pour que la série $\sum w_n$ soit convergente.

2) En déduire l'existence d'une constante réelle strictement positive L (que l'on ne cherchera pas à expliciter) telle que :

$$u_n \sim \frac{L}{n^{b-a}} \text{ quand } n \to \infty.$$

À quelle condition nécessaire et suffisante la série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

3) *On suppose pour cette question que la condition précédente est réalisée.*

Déterminer la limite de nu_n quand $n \to \infty$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n.$$

Calculer $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} z_n$.

En utilisant la relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ en fonction de a, b et u_0.

Problème : endomorphismes cycliques

Un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est dit *unitaire* si son coefficient dominant vaut 1.
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $GL(E)$ le groupe des endomorphismes bijectifs de E.
Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, une partie A de E est dite *stable par* f si $f(A) \subset A$.
On note χ_f le polynôme caractéristique de f, défini par la fonction polynomiale associée $t \mapsto \det(t.\mathrm{Id}_E - f)$.
Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit *cyclique* s'il existe un entier naturel non nul p et un vecteur $a \in E$ tels que :

$$C_a^p = \{a, f(a), \dots, f^{p-1}(a)\}$$

soit une partie génératrice de E de cardinal p, stable par f, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} C_a^p \text{ engendre } E \\ C_a^p \text{ possède } p \text{ éléments deux à deux distincts,} \\ f(C_a^p) \subset C_a^p \quad (i.e.\ \exists j \in \{0, \dots, p-1\} \quad f^p(a) = f^j(a)\ ) \end{cases}$$

Une telle partie C_a^p est nommée *cycle de* f et on dit alors que f est *cyclique d'ordre* p.

Partie I

1) Pour quel(s) entier(s) n un projecteur h de E peut-il être cyclique ?
Comment s'écrit alors un cycle de h ?

2) On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ (ici $n \geq 2$).

a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est cyclique et expliciter un cycle de f.
Déterminer le rang de f.
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b) Mêmes questions avec l'endomorphisme g de $\mathbb{C}^n$ de matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & -1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pourra utiliser le vecteur $a = -\sum_{i=1}^{n} e_i$.

3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire Π_f tel que les polynômes annulateurs de f soient les multiples de Π_f *(on commencera par justifier l'existence d'un polynôme de degré minimal parmi les polynômes annulateurs non nuls de f)*. Ce polynôme est appelé *le polynôme minimal de f*.

4) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique d'ordre p.

a) Justifier que $p \geq n$.

b) Montrer que f est de rang au moins $n - 1$.

5) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique et C_a^p un cycle de f.
Soit m le plus grand entier tel que la famille $\mathcal{F} = \big(a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a)\big)$ soit libre.

a) Prouver que : $\forall\, k \geq m \quad f^k(a) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

b) En déduire que la famille $\big(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a)\big)$ est une base de E.

c) Montrer que $\Pi_f = \chi_f$.

6) Montrer que si f est bijectif et si C_a^p est un cycle de f, alors $f^p(a) = a$.

7) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice dans la base canonique :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}.$$
On suppose que 1 n'est pas valeur propre de f.
Déterminer les valeurs (si elles existent) de α et β pour que f soit cyclique d'ordre 2.

Partie II

Dans cette partie on se propose de caractériser les endomorphismes cycliques inversibles.

1) Soit $f \in GL(E)$ un endomorphisme cyclique et C_a^p un cycle de f.

a) Montrer que $f^p = \mathrm{Id}_E$ et en déduire que f est diagonalisable.

b) Montrer que le polynôme χ_f $(= \Pi_f$ d'après **I.5.c.**$)$ divise $X^p - 1$ et que p est le plus petit des entiers naturels non nuls r tels que χ_f divise $X^r - 1$.

2) Réciproquement, on considère $f \in GL(E)$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que χ_f divise $X^p - 1$ mais ne divise aucun des polynômes $X^r - 1$ pour $1 \leq r < p$.

a) Montrer que $\Pi_f = \chi_f$.

b) Montrer que f est diagonalisable.

c) Soit $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de vecteurs propres de f et $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, v_i$ un vecteur de E tel que $\forall i \quad x_i \neq 0$. Montrer que la famille $\big(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\big)$ est libre.

d) Montrer que f est cyclique et que C_x^p est un cycle.

3) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de f.

b) f est-il cyclique ?

Partie III

Dans cette partie on se propose de caractériser les endomorphismes cycliques non inversibles.

1) Soit f cyclique d'ordre p non inversible et C_a^p un cycle de f.

a) Vérifier que $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$.

b) Montrer que $f^p(a) \neq a$.
Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $f^p(a) = f^k(a)$.

c) Montrer que $f^p = f^k$.

d) Montrer que χ_f $(= \Pi_f$ d'après **I.5.c.**$)$ est de la forme $X^j Q(X)$ où $j \in \mathbb{N}^*$ et Q est un polynôme qui divise $X^{p-k} - 1$.

Réciproquement, on considère $f \in \mathcal{L}(E)$, j et q dans $\mathbb{N}^*$ tels que :

$$\Pi_f = \chi_f = X^j Q$$

où Q est un polynôme qui divise $X^q - 1$ mais ne divise aucun des polynômes $X^r - 1$ pour $1 \leq r < q$.

2) Montrer que si Q est un polynôme constant, alors f est cyclique.

On suppose désormais que $\deg Q \geq 1$.

3) **a)** Montrer que

$$\operatorname{Im} f^j \subset \operatorname{Ker}(f^q - \operatorname{Id}_E) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} f^j \cap \operatorname{Ker}(f^q - \operatorname{Id}_E) = \{0\}\,.$$

En déduire que

$$E = \operatorname{Ker}(f^j) \oplus \operatorname{Ker}(f^q - \operatorname{Id}_E).$$

b) Justifier que les sous-espaces $E_1 = \operatorname{Ker} f^j$ et $E_2 = \operatorname{Ker}(f^q - \operatorname{Id}_E)$ sont stables par f.

On note f_1 et f_2 les endomorphismes induits par f sur E_1 et E_2.

4) **a)** Prouver que f_2 est cyclique d'ordre q. Soit $C_{a_2}^q$ un cycle de f_2.

b) Prouver que $\left(f^j(a_2), \ldots, f^{j+q-1}(a_2)\right)$ engendre E_2.

5) **a)** Montrer que $\chi_f = \chi_{f_1} \chi_{f_2}$ et en déduire que $\dim E_1 = j$.

b) Montrer que $f_1^{j-1} \neq 0$.

c) En déduire qu'il existe $a_1 \in E_1$ tel que $\left(a_1, f(a_1), \ldots, f^{j-1}(a_1)\right)$ est une base de E_1.

6) Soit $a = a_1 + a_2$; montrer que C_a^{j+q} est un cycle de f.

7) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & j \end{pmatrix}$$

où $j = \exp \dfrac{2i\pi}{3}$. Montrer que f est cyclique et déterminer un cycle.