Problème A : dérivation discrète

Partie I

1) Étant une famille de polynômes non nuls de degrés tous distincts, $(\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n)$ est une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension $n+1$, donc

$$\boxed{(\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Je remarque que :

$$\Gamma_k(X+1) = \frac{X+1}{k}\Gamma_{k-1} \quad \text{et} \quad \Gamma_k(X) = \frac{X-k+1}{k}\Gamma_{k-1},$$

d'où

$$\Delta\Gamma_k = \frac{X+1-X+k-1}{k}\Gamma_{k-1},$$

soit finalement :

$$\boxed{\Delta\Gamma_k = \Gamma_{k-1}.}$$

2) D'après le résultat précédent (complété par $\Delta\Gamma_0 = 0$) l'image par Δ d'un polynôme de degré k non nul est de degré $k-1$ et l'image d'un polynôme constant est le polynôme nul. *A fortiori*,

$$\boxed{\text{L'image par } \Delta \text{ d'un polynôme de } \mathbb{R}_n[X] \text{ est dans } \mathbb{R}_n[X].}$$

D'après les remarques précédentes,

$$\mathbb{R} \subset \operatorname{Ker}\Delta_n \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\Delta_n = \operatorname{Vect}(\Gamma_0, \ldots, \Gamma_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X],$$

donc, d'après le théorème du rang, $\operatorname{Ker}\Delta_n$ est de dimension 1. Finalement

$$\boxed{\operatorname{Ker}\Delta_n = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

3) La relation du **1)** se généralise aisément par récurrence :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2 \quad \Delta^k\Gamma_j = \begin{cases} \Gamma_{j-k} & \text{si } j \geq k \\ 0 & \text{si } j < k \end{cases}.$$

Soit alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P = \sum_{j=0}^{n} a_j\Gamma_j$ sa décomposition dans la base $(\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n)$. Pour $k \leq n$, d'après la remarque précédente,

$$\Delta^k P = \sum_{j=k}^{n} a_j\Gamma_{j-k}, \quad \text{d'où} \quad \left(\Delta^k P\right)(0) = a_k.$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad P = \sum_{k=0}^{n} \left(\Delta^k P\right)(0) \cdot \Gamma_k.}$$

Noter que — même si ce n'était pas nécessaire ici — on peut exprimer $\Delta^k P$ directement en fonction de P grâce à la formule du binôme ! En effet $\Delta = \phi - \mathrm{Id}_E$ où $E = \mathbb{R}_n[X]$ et ϕ l'endomorphisme de E qui à $P(X)$ associe $P(X+1)$. Comme ϕ et Id_E commutent, j'ai pour tout k dans $\mathbb{N}$ et tout P dans E :

$$\Delta^k = (\phi - \mathrm{Id}_E)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \phi^j \circ (-\mathrm{Id}_E)^{k-j} \quad \text{d'où} \quad \Delta^k P = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(X+j)$$

car il est immédiat par récurrence que $\phi^j(P) = P(X+j)$

4) <u>*Existence*</u> : d'après le **2)**, je dispose de $P_\alpha \in \mathbb{R}_{\alpha+1}[X]$ tel que $\Delta P_\alpha = X^\alpha$. J'ai alors

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad k^\alpha = P_\alpha(k+1) - P_\alpha(k),$$

d'où en sommant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{n} k^\alpha = P_\alpha(n+1) - P_\alpha(1),$$

donc $S_\alpha = P_\alpha(X+1) - P_\alpha(1)$ convient.

<u>*Unicité*</u> : si deux polynômes conviennent, leur différence admet tous les entiers n de $\mathbb{N}^*$ pour racines, c'est donc le polynôme nul.

En conclusion :

$$\boxed{\exists! S_\alpha \in \mathbb{R}_{\alpha+1}[X] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} k^\alpha = S_\alpha(n).}$$

Pour déterminer P_2, je pars de : $X^2 = \left(\Delta X^2\right)(0) \cdot \Gamma_1 + \left(\Delta^2 X^2\right)(0) \cdot \Gamma_2$ (d'après **3)**).
Or $\Delta X^2 = 2X + 1$ et $\Delta^2 X^2 = 2$.
Donc $X^2 = \Gamma_1 + 2\Gamma_2$ et $P_2 = \Gamma_2 + 2\Gamma_3$ convient (d'après **1)**). J'en déduis

$$\boxed{S_2 = \frac{X(X+1)(2X+1)}{6}.}$$

J'obtiens de même : $X^3 = \Gamma_1 + 6\Gamma_2 + 6\Gamma_3$ et $P_2 = \Gamma_2 + 6\Gamma_3 + 6\Gamma_4$ convient. Et enfin

$$\boxed{S_3 = \frac{X^2(X+1)^2}{4}.}$$

Partie II

1) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{Z}$:

- si $0 \leq z < k$: $\Gamma_k(z) = 0 \in \mathbb{Z}$;
- si $z \geq k$: $\Gamma_k(z) = \binom{z}{k} \in \mathbb{Z}$;
- si $z < 0$: soit $n = -z$; $\Gamma_k(z) = (-1)^k \cdot \dfrac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \cdot \dbinom{n+k-1}{k} \in \mathbb{Z}$.

En conclusion :

$$\boxed{\forall (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \quad \Gamma_k(z) \in \mathbb{Z}.}$$

2) L'implication (**a**) $\Rightarrow$ (**b**) est banale, (**c**) $\Rightarrow$ (**a**) découle immédiatement du **1)**.
Pour prouver (**b**) $\Rightarrow$ (**c**), je montre par récurrence sur n que la propriété $\mathcal{P}_n$: "si P est un polynôme de degré n tel qu'il existe $n+1$ entiers relatifs consécutifs où P prend des valeurs entières, alors les coordonnées de P dans la base $(\Gamma_0, \dots, \Gamma_n)$ sont entières" est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

- $\mathcal{P}_0$ est vraie : si P est un polynôme constant tel qu'il existe un entier relatif où P prend une valeur entière, soit z, alors $P = z = z.\Gamma_0$ et la coordonnée de P dans la base (Γ_0) est entière !
- Je suppose que $n \geq 1$ est tel que $\mathcal{P}_{n-1}$ soit vraie et je considère P de degré n et $z_0, z_1, \dots, z_n$, $n+1$ entiers consécutifs où P prend des valeurs entières ; P s'écrit $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \Gamma_k$ et
$$\Delta P = \sum_{k=1}^{n} a_k \Gamma_{k-1} = P(X+1) - P(X)$$
prend des valeurs entières en $z_0, \dots, z_{n-1}$; d'après l'hypothèse de récurrence, $a_1, \dots, a_n$ sont entiers ; enfin
$$a_0 = P(z_0) - \sum_{k=1}^{n} a_k \Gamma_k(z_0) \in \mathbb{Z},$$
ce qui achève la démonstration.

Finalement, (**a**) $\Rightarrow$ (**b**) $\Rightarrow$ (**c**) $\Rightarrow$ (**a**), donc

$$\boxed{(\mathbf{a}), (\mathbf{b}), (\mathbf{c}) \text{ sont équivalentes.}}$$

Partie III

1) *Analyse* : si la suite (δ_n) convient, nécessairement

$$\delta_0 = f(0) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \delta_n = f(n) - \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \Gamma_k(n) \ \text{ (car } \Gamma_n(n) = 1\text{)}.$$

Synthèse : les relations ci-dessus définissent bien par récurrence une suite (δ_n), qui est clairement solution du problème posé ; c'est la seule d'après l'analyse :

$$\boxed{\text{Il existe une unique suite } (\delta_n) \text{ solution du problème.}}$$

2) Je vérifie le résultat par récurrence forte sur n :

- $\delta_0 = 1 = (b-1)^0$;
- si je suppose que $\delta_k = (b-1)^k$ pour $k \leq n-1$, alors
$$\delta_n = b^n - \sum_{k=0}^{n-1} (b-1)^k \Gamma_k(n) = b^n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (b-1)^k = b^n - [(b-1+1)^n - (b-1)^n] = (b-1)^n$$
En conclusion :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \delta_n = (b-1)^n.}$$

3) Je pourrais invoquer les polynômes de Lagrange, mais je constate dans ce contexte que $L = \sum_{k=0}^{n} \delta_k \Gamma_k$ vérifie, par construction même de la suite (δ_n),
$$\forall k \in \{0, \ldots, n\} \quad f(k) = L(k).$$
De plus L est bien de degré au plus n et l'unicité d'un tel polynôme d'interpolation est classique (s'il en existe deux, leur différence est nulle en tant que polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ admettant au moins $n+1$ racines distinctes). En conclusion :
$$\boxed{\exists! L \in \mathbb{R}_n[X] \quad \forall k \in \{0, \ldots, n\} \quad f(k) = L(k).}$$
L étant ainsi choisi, je montre par récurrence sur $i \in \{0, \ldots, n\}$ la propriété
$$\mathcal{P}_i : \forall j \in \{0, \ldots, n-i\} \quad \left(\Delta^i f\right)(j) = \left(\Delta^i L\right)(j).$$

- $\mathcal{P}_0$ est vraie par définition de L ;
- je suppose que $i \in \{1, \ldots, n\}$ est tel que $\mathcal{P}_{i-1}$ soit vraie ; soit alors $j \in \{0, \ldots, n-i\}$; $j+1$ appartenant à $\{0, \ldots, n-(i-1)\}$, j'ai, grâce à l'hypothèse de récurrence,
$$\begin{aligned} \left(\Delta^i f\right)(j) &= \left[\Delta\left(\Delta^{i-1} f\right)\right](j) = \left(\Delta^{i-1} f\right)(j+1) - \left(\Delta^{i-1} f\right)(j) \\ &= \left(\Delta^{i-1} L\right)(j+1) - \left(\Delta^{i-1} L\right)(j) = \left(\Delta^i L\right)(j), \end{aligned}$$
ce qui prouve bien $\mathcal{P}_i$.
$$\boxed{\forall i \in \{0, \ldots, n\} \quad \forall j \in \{0, \ldots, n-i\} \quad \left(\Delta^i f\right)(j) = \left(\Delta^i L\right)(j).}$$
Or j'ai vu ci-dessus que $L = \sum_{k=0}^{n} \delta_k \Gamma_k$ et, d'après le **I,** $L = \sum_{k=0}^{n} \left(\Delta^k L\right)(0) \Gamma_k$; j'ai donc, par unicité des coordonnées de L dans la base $(\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n)$, et grâce au résultat précédent
$$\forall k \in \{0, \ldots, n\} \quad \delta_k = \left(\Delta^k L\right)(0) = \left(\Delta^k f\right)(0),$$
et cela pour tout n de $\mathbb{N}$. Finalement :
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad \delta_k = \left(\Delta^k f\right)(0).}$$

4) a) Pour $x \in \{0, \ldots, n\}$, $\Gamma_{n+1}(x)$ étant nul, l'égalité souhaitée est vraie quel que soit θ, par le choix même des δ_k.

b) Soit maintenant $x \in]a, +\infty[\setminus \{0, \ldots, n\}$; $\Gamma_{n+1}(x)$ étant non nul,
$$\boxed{K = \frac{1}{\Gamma_{n+1}(x)} \cdot \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \delta_k \Gamma_k(x)\right) \text{ vérifie } \Phi(x) = 0.}$$
Φ est alors de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$ et s'annule en $n+2$ points de cet intervalle, à savoir $0, \ldots, n$ et x : en appliquant $(n+1)(n+2)/2$ fois le théorème de Rolle, j'obtiens pour tout k de $\mathbb{N}_{n+1}$, $n+2-k$ points où $\Phi^{(k)}$ s'annule. Je dispose donc d'un point θ où $\Phi^{(n+1)}$ s'annule, or $\sum_{k=0}^{n} \delta_k \Gamma_k$ est un polynôme de degré au plus n et le terme dominant de Γ_{n+1} est $\dfrac{X^{n+1}}{(n+1)!}$, d'où
$$\forall t \in [a, +\infty[\quad \Phi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - K,$$
donc $K = f^{(n+1)}(\theta)$, d'où, en reportant dans l'égalité $\Phi(x) = 0$,
$$\boxed{\exists \theta \in [a, +\infty[\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \delta_k \Gamma_k(x) + \Gamma_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta).}$$

c) En regardant de plus près les applications du théorème de Rolle ci-dessus, il apparaît que
$$\theta > \min(0, x).$$
Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ et λ_n le réel θ fourni par le résultat précédent appliqué avec $n-1$ à la place de n et n à la place de x ; j'ai $\lambda_n > 0$ d'après la remarque ci-dessus et
$$f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \Gamma_k(n) + \Gamma_n(n) f^{(n)}(\lambda_n) \text{ , soit } \quad \delta_n = f^{(n)}(\lambda_n).$$
Enfin, pour $n = 0$, $\lambda_0 = 0$ convient puisque $\delta_0 = f(0) = f^{(0)}(0)$.
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \quad \delta_n = f^{(n)}(\lambda_n).}$$

5) Soit r réel tel que k^r soit entier pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (r est donc positif ou nul). Je choisis (habilement !) deux entiers n, p tels que
$$n \geq r + 1 \quad \text{et} \quad p > |r(r-1)\ldots(r-n+1)|.$$
La fonction $f : x \mapsto (p+x)^r$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$, je dispose donc d'après le **4)c)** de λ_n dans $\mathbb{R}^+$ tel que
$$\delta_n = f^{(n)}(\lambda_n) = r(r-1)\ldots(r-n+1)(p+\lambda_n)^{r-n}.$$
Comme $\lambda_n \geq 0$ et $r - n \leq -1$, j'ai (d'après le choix de p),
$$|\delta_n| \leq \frac{|r(r-1)\ldots(r-n+1)|}{p} < 1.$$
Or par hypothèse les images des entiers naturels par f sont des entiers ; il en résulte que δ_n, qui est égal d'après **3)** à $(\Delta^n f)(0)$ est entier : nécessairement $\delta_n = 0$, et donc
$$r(r-1)\ldots(r-n+1) = 0.$$
En conclusion, r est l'un des entiers $0, 1, \ldots, n-1$, donc r est un entier naturel.

Réciproquement, il est bien clair que, si $r \in \mathbb{N}$, alors k^r est entier pour tout k de $\mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{Les nombres réels } r \text{ tels que } k^r \text{ soit entier pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ sont les entiers naturels.}}$$

Problème B : sommes de projecteurs

1 – Traces et projecteurs

N.B. 1), **2)** et **3)** sont des questions de cours ! Et il y en avait encore plus dans l'épreuve originale (Mines-Ponts PC 2014)...

1) Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_n$. Je note $C = AB = (c_{i,j})$; par définition du produit matriciel
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$
d'où
$$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}$$
où je constate que A et B jouent des rôles symétriques, puisque les indices muets i et k peuvent être intervertis, ainsi que les deux sommes (finies !). Il en résulte que
$$\boxed{\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA).}$$

2) Soient A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_n$ représentant t dans deux bases de X. Selon la formule de changement de base, je dispose d'une matrice P de $GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A' = P^{-1}AP$. Alors d'après **1)**
$$\operatorname{Tr}(A') = \operatorname{Tr}\left(\left(P^{-1}A\right)P\right) = \operatorname{Tr}\left(P\left(P^{-1}A\right)\right) = \operatorname{Tr}(A).$$
Autrement dit :
$$\boxed{\text{La trace d'une matrice représentant } t \text{ dans une base } \mathcal{B} \text{ est indépendante du choix de } \mathcal{B}.}$$
C'est la justification de la définition de $\operatorname{Tr}(t)$ et Tr est alors une forme linéaire sur $\mathcal{L}(X)$.

3) Puisque p est un projecteur, $X = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et je dispose d'une base $\mathcal{B}$ de X adaptée à cette décomposition. Or les vecteurs de $\mathrm{Im}(p)$ sont invariants par p, donc $T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $r = \mathrm{rg}(p)$. Il en résulte immédiatement

$$\boxed{\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p).}$$

4) Soit $s = \sum_{i=1}^{m} p_i \in \mathcal{L}(X)$ où les p_i sont des projecteurs de X. Déjà par linéarité et d'après **3)**

$$\mathrm{Tr}(s) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Tr}(p_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{rg}(p_i) \in \mathbb{N}.$$

Par ailleurs $\mathrm{Im}(s) \subset \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Im}(p_i)$, d'où $\mathrm{rg}(s) \leq \dim\left(\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Im}(p_i)\right)$. Or la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels E_i de X est au plus égale à la somme de leurs dimensions. Cela peut se prouver par récurrence à partir de la formule de Grassmann, ou bien directement en remarquant que $\sum E_i$ est l'image de $\prod E_i$ par l'application linéaire de X^m dans X qui à $(x_1, \ldots, x_m)$ associe $\sum x_i$. Or le rang d'une application linéaire est au plus égal à la dimension de l'espace de départ.

Par conséquent :

$$\mathrm{rg}(s) \leq \sum_{i=1}^{m} \mathrm{rg}(p_i).$$

En conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(s) \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(s) \geq \mathrm{rg}(s).}$$

2 – Projecteurs de rang 1

5) Je fixe dès maintenant f_1 vecteur directeur de $\mathrm{Im}(p)$ et $(f_2, \ldots f_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$. Alors, pour $j \geq 2$, $p \circ t \circ p\,(f_j) = 0$ puisque $f_j \in \mathrm{Ker}(p)$. De plus f_1 est invariant par p donc $p \circ t \circ p(f_1) = p\,[t(f_1)]$, vecteur de $\mathrm{Im}(p)$ donc colinéaire à f_1. Je dispose donc de μ réel tel que $p \circ t \circ p(f_1) = \mu.f_1 = \mu.p(f_1)$. Ainsi, les deux endomorphismes $p \circ t \circ p$ et $\mu.p$ coïncident sur la base $\mathcal{C}$, par conséquent

$$\boxed{\exists \mu \in \mathbb{R} \quad p \circ t \circ p = \mu.p.}$$

On peut noter que μ est unique puisque (f_1) est une base de $\mathrm{Im}(p)$.

6) μ étant ainsi fixé, j'ai $p\,[t(f_1)] = \mu.f_1$, ce qui signifie que $t(f_1) - \mu.f_1$ est un vecteur de $\mathrm{Ker}(p)$, c'est-à-dire que μ est la première coordonnée de $t(f_1)$ dans $\mathcal{C}$. Ainsi μ est la première valeur de la première colonne de $T_{\mathcal{C}}$ et c'est juste ce qu'il fallait démontrer (aucune contrainte sur les autres coefficients de la matrice !).

$$\boxed{T_{\mathcal{C}} \text{ est de la forme indiquée dans l'énoncé.}}$$

7) Je procède par contraposition. Je suppose que $B = \lambda.I_{n-1}$ et je calcule (par blocs) la matrice dans $\mathcal{C}$ de $p' \circ t \circ p'$:

$$P'_{\mathcal{C}} = I_n - P_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad P'_{\mathcal{C}} T_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

et

$$P'_{\mathcal{C}} T_{\mathcal{C}} P'_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \lambda.P'_{\mathcal{C}}.$$

Il en résulte que $p' \circ t \circ p' = \lambda.p'$ est proportionnel à p'. D'où finalement

$$\boxed{\text{Si } p' \circ t \circ p' = \lambda.p' \text{ n'est pas proportionnel à } p'\text{, alors } B \text{ n'est pas une matrice d'homothétie.}}$$

Le calcul ci-dessus montre qu'il s'agit en fait d'une équivalence !

3 – Endomorphismes différents d'une homothétie

8) Exercice classique fait en classe ! Là encore j'utilise la contraposée. Je suppose que x et $t(x)$ sont colinéaires pour tout x de X et je fixe v non nul dans X. Je dispose alors d'un réel α tel que $t(v) = \alpha.v$.

Soit $x \in X$; deux cas se présentent.

- soit x est colinéaire à v : alors x s'écrit $\lambda.v$, $t(x) = \lambda.t(v)$ par linéarité, d'où $t(x) = \lambda\alpha.v = \alpha.x$
- soit (v, x) est une famille libre : alors je dispose par hypothèse de β réel tel que $t(x) = \beta.x$ et de γ réel tel que $t(v + x) = \gamma.(v + x)$. D'où par linéarité :
$$\alpha.v + \beta.x = \gamma.v + \gamma.x \quad i.e. \quad (\alpha - \gamma).v + (\beta - \gamma).x = 0$$
donc $\alpha = \gamma$ et $\beta = \gamma$ puisque (v, x) est libre. Finalement $\beta = \alpha$ et $t(x) = \alpha.x$

Ainsi, pour tout x dans X, $t(x) = \alpha.x$; autrement dit $t = \alpha.\mathrm{Id}$.

D'où la conclusion par contraposition :

$$\boxed{\text{Si } t \text{ n'est pas une homothétie, il existe } x \text{ dans } X \text{ tel que } x \text{ et } t(x) \text{ ne soient pas colinéaires.}}$$

9) Puisque t n'est pas une homothétie par hypothèse, le résultat précédent me fournit e_1 dans X tel que $(e_1, t(e_1))$ soit une famille libre. Alors le théorème de la base incomplète me donne une base $\mathcal{B}$ de X de la forme $(e_1, t(e_1), e_3, \dots, e_n)$. Par construction, la famille des coordonnées de $t(e_1)$ dans $\mathcal{B}$ est $(0, 1, 0 \dots, 0)$ donc la première colonne de $T_{\mathcal{B}}$ est celle souhaitée. Or il n'y a pas de contrainte sur les autres colonnes.

$$\boxed{\text{Il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } X \text{ telle que } T_{\mathcal{B}} \text{ soit de la forme souhaitée.}}$$

10) Je montre la propriété par récurrence sur n ; soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : "Dans tout espace vectoriel de dimension n, pour tout endomorphisme de trace nulle, il existe une base où sa matrice n'a que des 0 sur la diagonale".

$\mathcal{P}_1$ est banale ; $\mathcal{P}_2$ découle du **9)** puisqu'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \times \\ 1 & a \end{pmatrix}$ et de trace nulle a bien sa diagonale nulle !

<u>*Hypothèse de récurrence*</u> : je suppose $n \geq 3$ tel que $\mathcal{P}_{n-1}$ soit vraie et je considère X de dimension n et $t \in \mathcal{L}(X)$ de trace nulle. Si t est une homothétie, t est nul (car sa trace est nulle) et n'importe quelle base convient !

Si t n'est pas une homothétie, le **9)** me fournit une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ où $e_2 = t(e_1)$. Je considère alors $X_1 = \operatorname{Vect} \mathcal{B}_1$ où $B_1 = (e_2, \dots, e_n)$ et t_1 l'endomorphisme de X_1 de matrice A dans $\mathcal{B}_1$ (A étant la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}$ apparaissant au **9)**). Vu la première colonne de $T_{\mathcal{B}}$, j'ai $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(t) = 0$, donc $\mathrm{Tr}(t_1) = \mathrm{Tr}(A) = 0$. Je peux donc appliquer l'hypothèse de récurrence à t_1 : je dispose de $\mathcal{B}_1' = (e_2', \dots, e_n')$ base de X_1 telle que la matrice de t_1 dans B_1' n'ait que des zéros sur sa diagonale. Autrement dit, je dispose d'une matrice Q, inversible et d'ordre $n - 1$, telle que $Q^{-1}AQ$ n'ait que des zéros sur sa diagonale. Je pose alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$. Il est clair que P est d'ordre n, inversible avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ et que

$$\begin{aligned} P^{-1}T_{\mathcal{B}}P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ & & A & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots & \times \\ \hline \times & & & \\ \times & & & \\ & & Q^{-1}A & \\ \vdots & & & \\ \times & & & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots & \times \\ \hline \times & & & \\ \times & & & \\ & & Q^{-1}AQ & \\ \vdots & & & \\ \times & & & \end{array}\right) \text{ qui n'a que des 0 sur sa diagonale.} \end{aligned}$$

Par conséquent $T_{\mathcal{B}}$ est semblable à une matrice de diagonale nulle, donc il existe une base de X où la matrice de t est de diagonale nulle. Cela achève la démonstration par récurrence.

11) On suppose ici X de dimension 2 et $\mathrm{Tr}(t) = d_1 + d_2$. Soit $t' = t - d_1.\mathrm{Id}$. t' n'est pas une homothétie (sinon t en serait une et l'on a supposé le contraire). Donc la question **9)** me fournit une base $\mathcal{B}$ telle que $T'_{\mathcal{B}}$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & a \end{pmatrix}$ avec a et x réels. Autrement dit

$$T_{\mathcal{B}} - d_1.I_2 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & a \end{pmatrix}, \text{ soit } T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} d_1 & x \\ 1 & a + d_1 \end{pmatrix}.$$

Alors le calcul de $\mathrm{Tr}(T_{\mathcal{B}})$ montre que $a + d_1 = d_2$:

$$\boxed{\text{Il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } X \text{ telle que } T_{\mathcal{B}} \text{ a pour éléments diagonaux } d_1 \text{ et } d_2.}$$

12) Selon la propriété admise, je dispose d'un projecteur ℓ de rang 1 de X, tel que d'une part $\ell \circ t \circ \ell = d_1.\ell$ et d'autre part $\ell' \circ t \circ \ell'$ n'est pas proportionnel à $\ell' = \mathrm{Id} - \ell$. Alors d'après la question **6)**, dans une base $\mathcal{C}$ adaptée à la décomposition $X = \mathrm{Im}(\ell) \oplus \mathrm{Ker}(\ell)$, t a sa matrice de la forme

$$T_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} d_1 & \times & \cdots & \times \\ \hline \times & & & \\ \vdots & & B & \\ \times & & & \end{array}\right)$$

et selon la question **7)**, puisque $\ell' \circ t \circ \ell'$ n'est pas proportionnel à ℓ', B n'est pas une matrice d'homothétie, d'où le résultat.

13) Soit pour $n \geq 2$ la propriété $\mathcal{Q}_n$: "Dans tout espace vectoriel de dimension n, pour tout endomorphisme n'étant pas une homothétie, de trace $\sum_{i=1}^{n} d_i$, il existe une base où sa matrice a pour coefficients diagonaux les d_i, $i \in [\![1, n]\!]$". $\mathcal{Q}_2$ a été prouvée au **11)**.

<u>*Hypothèse de récurrence*</u> : je suppose $n \geq 3$ tel que $\mathcal{Q}_{n-1}$ soit vraie.

Soit alors X de dimension n et $t \in \mathcal{L}(X)$ n'étant pas une homothétie. J'applique le **12)** qui me fournit une base $\mathcal{C} = (e_1, \ldots e_n)$ et une matrice B de $\mathcal{M}_{n-1}$ n'étant pas une matrice d'homothétie, telles que $T_{\mathcal{C}}$ ait la forme annoncée. Par construction $\mathrm{Tr}(B) = \sum_{i=2}^{n} d_i$. J'applique l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme de $Y = \mathrm{Vect}\,(e_2, \ldots e_n)$ ayant pour matrice B dans cette base, qui n'est pas une homothétie. J'obtiens ainsi une matrice Q de $GL_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} d_2 & & \times \\ & \ddots & \\ \times & & d_n \end{pmatrix}.$$

Enfin, des produits par blocs similaires à ceux du **10)** permettent de conclure :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|ccc} d_1 & \times & \cdots & \times \\ \hline \times & & & \\ \vdots & & B & \\ \times & & & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} d_1 & \times & \cdots & \times \\ \hline \times & & & \\ \times & & & \\ \vdots & & Q^{-1}BQ & \\ \times & & & \end{array}\right)$$

qui a bien pour éléments diagonaux les d_i, $i \in [\![1, n]\!]$. Cela achève la démonstration par récurrence.

4 – Décomposition en somme de projecteurs

Notons que $\rho > 0$, puisque t a été supposé non nul. Cela dit 0 est une somme finie de projecteurs...

14) Je choisis un supplémentaire X_1 de $\mathrm{Ker}(t)$, qui est de dimension ρ d'après le théorème du rang. Soit alors $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base adaptée à la décomposition $X = X_1 \oplus \mathrm{Ker}(t)$. J'ai bien $T_{\mathcal{B}}$ de la forme souhaitée (la seule contrainte étant en fait que les $n - \rho$ dernières colonnes soient nulles !).

15) On suppose ici que T_1 n'est pas une matrice d'homothétie. De plus $\mathrm{Tr}(T_1) = \mathrm{Tr}(t)$ est par hypothèse un entier supérieur ou égal à ρ. Je peux donc l'écrire comme une somme de ρ entiers strictement positifs d_i, $i \in [\![1, \rho]\!]$ (par exemple en posant $d_i = 1$ pour $i \in [\![1, \rho - 1]\!]$ et $d_\rho = \mathrm{Tr}(T_1) - \rho + 1$). Je peux donc appliquer le résultat du **13)** à l'endomorphisme t_1 de X_1 ayant pour matrice T_1 dans la base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots e_\rho)$, ce qui me donne une base $\mathcal{B}'_1 = \left(e'_1, \dots, e'_\rho\right)$ de X_1 où la matrice de t_1 a pour éléments diagonaux les d_i, $i \in [\![1, \rho]\!]$. Alors

$$\boxed{\text{La base } \mathcal{B}' = \left(e'_1, \dots, e'_\rho, e_{\rho+1}, \dots, e_n\right) \text{ convient.}}$$

16) Je remarque qu'une matrice P de $\mathcal{M}_n$, ayant un 1 sur la diagonale dans l'une de ses colonnes et toutes ses autres colonnes nulles, est une matrice de projecteur. En effet $P^2 = P$ de façon immédiate.

Je pose alors, avec les notations du **15)**, pour tout i de $[\![1, \rho]\!]$, $P_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{d_i} C_i & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, matrice définie par ses colonnes, où C_i est la i-ième colonne de $T_{\mathcal{B}'}$.

Par construction $T_{\mathcal{B}'} = \sum\limits_{i=1}^{\rho} d_i . P_i$, qui est bien une somme finie de matrices de projecteurs, puisque les P_i en sont d'après la remarque précédente et les d_i sont des entiers naturels non nuls (donc $d_i . P_i$ est la somme de d_i matrices toutes égales à P_i !!). En conclusion,

$$\boxed{t \text{ est une somme finie de projecteurs.}}$$

17) On suppose ici T_1 de la forme $\alpha . I_\rho$; ainsi $\mathrm{Tr}(t) = \rho\alpha$ et l'hypothèse $\mathrm{Tr}(t) \geq \rho$ donne $\alpha \geq 1$ (car $\rho > 0$). Je distingue deux cas.

- <u>Si $\alpha = 1$</u> : la méthode du **16)** s'applique et donne $T_{\mathcal{B}'}$ comme somme de ρ matrices de projecteurs.
- <u>Si $\alpha > 1$</u> : je considère p_0 le projecteur de matrice $P_0 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \ \cdots \ 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{array}\right)$ dans $\mathcal{B}'$. Alors

  $t_0 = t - p_0$ a pour matrice dans $\mathcal{B}'$ la matrice $T_0 = \begin{pmatrix} T''_1 & 0 \\ T''_2 & 0 \end{pmatrix}$ où T''_1 a pour éléments diagonaux $\alpha - 1, \alpha, \dots, \alpha$. T''_1 n'est donc pas une matrice d'homothétie. Or $\mathrm{Tr}(T_0) = \rho\alpha - 1 = \mathrm{Tr}(t) - 1$ est un entier naturel strictement supérieur à $\rho - 1$ (car $\rho > 0$ et $\alpha > 1$). Donc $\mathrm{Tr}(T_0) \geq \rho$. De plus $\mathrm{rg}(T_0) \leq \rho$, puisque T_0 a au plus ρ colonne non nulles.

  Par conséquent t_0 a une trace entière au moins égale à son rang et le **16)** s'applique, puisque T''_1 n'est pas une matrice d'homothétie. Ainsi t_0 est une somme finie de projecteurs et il en est de même de $t = t_0 + p_0$.

Donc dans tous les cas

$$\boxed{t \text{ est une somme finie de projecteurs.}}$$

En regroupant ce résultat, celui du **4)** et la cas $t = 0$, nous avons établi le théorème suivant :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Un endomorphisme en dimension finie est une somme de projecteurs} \\ \text{si et seulement si sa trace est un entier au moins égal à son rang.}\end{array}}$$