D.S. 1 *(4 heures)*

Problème A : dérivation discrète

Pour tout entier naturel k on définit le polynôme Γ_k de $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$\Gamma_0 = 1 \ ; \ \Gamma_1 = X \ ; \ \Gamma_2 = \frac{X(X-1)}{2} \ ; \ \dots \ ; \ \Gamma_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

Dans tout le problème, n désignera un entier naturel et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré au plus égal à n.
On confondra polynôme et fonction polynomiale.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on définit le polynôme ΔP par

$$\Delta P(X) = P(X+1) - P(X).$$

On note Δ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui à tout polynôme P associe ΔP et l'on pose

$$\Delta^0 = \mathrm{Id} \ ; \ \forall k \in \mathbb{N} \quad \Delta^{k+1} = \Delta \circ \Delta^k \quad (\mathrm{Id} \text{ désignant l'identité de } \mathbb{R}[X]\,).$$

Les parties **II** et **III** sont indépendantes.

Partie I

1) Montrer que $(\Gamma_0, \dots, \Gamma_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \Delta\Gamma_k = \Gamma_{k-1}$.

2) Montrer que, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\Delta P \in \mathbb{R}_n[X]$.
On définit alors l'endomorphisme Δ_n de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à P associe ΔP. Déterminer $\operatorname{Ker}\Delta_n$ et $\operatorname{Im}\Delta_n$.

3) Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad P = \sum_{k=0}^{n} \left(\Delta^k P\right)(0) \cdot \Gamma_k.$$

4) Montrer que, pour tout entier naturel α, il existe un unique polynôme S_α de $\mathbb{R}_{\alpha+1}[X]$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} k^\alpha = S_\alpha(n).$$

(On pourra rechercher un antécédent de X^α par Δ.)
À l'aide du **3)**, déterminer S_2 et S_3.

Partie II

1) Montrer que, pour tout entier naturel k et pour tout entier relatif z, $\Gamma_k(z)$ est aussi un entier relatif.

2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- **(a)** Pour tout entier relatif z, $P(z)$ est un entier relatif.
- **(b)** Il existe $n+1$ entiers relatifs consécutifs $z_0, \dots, z_n$ tels que les $P(z_k)$ soient des entiers relatifs.
- **(c)** Les coordonnées de P dans la base $(\Gamma_0, \dots, \Gamma_n)$ sont des entiers relatifs.

Partie III

On considère dans cette partie une application f de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, a étant un nombre réel donné, négatif ou nul.
On note Δf la fonction $x \mapsto f(x+1) - f(x)$.
On généralise de même la notation $\Delta^k f$: $\Delta^0 f = f$ et $\forall k \in \mathbb{N} \quad \Delta^{k+1} f = \Delta\left(\Delta^k f\right)$.

1) Montrer qu'il existe une unique suite $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telle que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} \delta_k \Gamma_k(x)$ s'annule pour les $n+1$ entiers consécutifs $0, 1, \dots, n$.

2) <u>*Exemple*</u> : soit $b \in \mathbb{R}^{+*}$; montrer que la suite associée à $f : x \mapsto b^x$ est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \delta_k = (b-1)^k .$$

3) Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall j \in \{0, \dots, n\} \quad f(j) = L(j).$$

Montrer que, si L est ainsi choisi :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad \forall j \in \{0, \dots, n-i\} \quad \left(\Delta^i f\right)(j) = \left(\Delta^i L\right)(j).$$

En déduire que la suite étudiée au **1)** est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \delta_k = \left(\Delta^k f\right)(0).$$

4) On suppose désormais f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et l'on se propose de montrer que, pour tout x de $]a,+\infty[$, il existe un réel θ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \delta_k \Gamma_k(x) + \Gamma_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta)$$

*(où (δ_k) est la suite étudiée au **1)**).*

a) Établir le résultat pour $x \in \{0, \dots, n\}$.

b) Pour $x \in]a,+\infty[\setminus \{0, \dots, n\}$ (x fixé), on définit

$$\Phi : t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^{n} \delta_k \Gamma_k(t) - K\Gamma_{n+1}(t).$$

Montrer que l'on peut choisir le réel K de sorte que : $\Phi(x) = 0$.
À l'aide du théorème de Rolle, conclure à l'existence de θ.

c) Déduire du résultat précédent que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \quad \delta_n = f^{(n)}(\lambda_n).$$

5) Déduire de la question précédente que les seuls nombres réels r tels que k^r soit entier pour tout k de $\mathbb{N}^*$ sont les entiers naturels *(on pourra utiliser la suite (δ_n) associée à $x \mapsto (p+x)^r$, pour p choisi convenablement).*

Problème B : sommes de projecteurs

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.
Dans tout le problème, X est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur le corps des réels et t un endomorphisme non nul de X.

Soit $\mathcal{B}$ une base de X, on note $T_{\mathcal{B}}$ la matrice représentant t dans cette base.
On note $\mathrm{Ker}(t)$ le noyau de t, $\mathrm{Im}(t)$ l'image de t et $\mathrm{rg}(t) = \dim \mathrm{Im}(t)$ le rang de t.
On dit que t est une *homothétie* si c'est un multiple scalaire de l'identité.
On note Id l'endomorphisme identité de X, I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n$ et 0 la matrice nulle quelles que soient ses dimensions.
On appelle *projecteur* un endomorphisme p de X *idempotent*, c'est-à-dire tel que $p^2 = p$. On note alors $p' = \mathrm{Id} - p$ le projecteur associé.

1 – Traces et projecteurs

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est élément de $\mathcal{M}_n$, on appelle *trace* de A le nombre réel suivant :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

1) Soient A et B éléments de $\mathcal{M}_n$, montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

2) Montrer que la trace de la matrice $T_{\mathcal{B}}$ associée à t est indépendante de la base $\mathcal{B}$.
On appelle *trace de t*, notée $\mathrm{Tr}\,(t)$, la valeur commune des traces des matrices représentant t. On dit que la trace est un invariant de similitude.

3) Soit p un projecteur de X. Montrer que $\mathrm{rg}\,(p) = \mathrm{Tr}\,(p)$.

4) Montrer que, si l'endomorphisme s est une somme finie de projecteurs p_i, $i \in [\![1, m]\!]$, alors

$$\mathrm{Tr}\,(s) \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}\,(s) \geq \mathrm{rg}\,(s)\,.$$

La fin du problème a pour but d'établir la réciproque de cette propriété.

2 – Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que p est un projecteur de rang 1.

5) Démontrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $p \circ t \circ p = \mu . p$ (t étant toujours fixé dans $\mathcal{L}\,(X)$).

Soit $C = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une base de X adaptée à la décomposition $X = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ (c'est-à-dire que f_1 est un vecteur directeur de $\mathrm{Im}(p)$ et $(f_2, \ldots, f_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$)**.**

6) Montrer que dans la base $\mathcal{C}$ la matrice représentant t s'écrit

$$T_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} \mu & \times & \cdots & \times \\ \hline \times & & & \\ \vdots & & B & \\ \times & & & \end{array}\right) \quad \text{(les } \times \text{ représentant des réels quelconques)} \qquad (1)$$

où μ est le nombre réel dont l'existence découle de la question **5** et $B \in \mathcal{M}_{n-1}$.

7) Montrer que si $p' \circ t \circ p'$ n'est pas proportionnel à p', alors B, définie en (1), n'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que $p' = \mathrm{Id} - p$.

3 – Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que l'endomorphisme t n'est pas une homothétie.

8) Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in X$ tel que x et $t(x)$ ne soient pas liés (c'est-à-dire ne soient pas colinéaires).

9) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ dans laquelle la matrice $T_\mathcal{B}$ est de la forme suivante :

$$T_\mathcal{B} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right) \quad \text{où} \quad A \in \mathcal{M}_{n-1}.$$

10) En déduire que si $\mathrm{Tr}(t) = 0$, il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la diagonale de $T_{\mathcal{B}'}$ est nulle.

Soit d_i, $i \in [\![1, n]\!]$ une suite de n nombres réels vérifiant $\mathrm{Tr}(t) = \sum_{i=1}^{n} d_i$.

11) En dimension $n = 2$, démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $T_\mathcal{B}$ a pour éléments diagonaux d_1 et d_2.

Soit $d \in \mathbb{R}$, on admettra qu'en dimension $n \geq 3$, il existe un projecteur ℓ de X de rang 1, tel que d'une part $\ell \circ t \circ \ell = d.\ell$ et d'autre part $\ell' \circ t \circ \ell'$ ne soit pas proportionnel à $\ell' = \mathrm{Id} - \ell$.

12) En dimension $n \geq 3$, à l'aide des questions **6** et **7** démontrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ dans laquelle la matrice représentant t s'écrit

$$T_\mathcal{C} = \left(\begin{array}{c|ccc} d_1 & \times & \cdots & \times \\ \hline \times & & & \\ \vdots & & B & \\ \times & & & \end{array}\right) \quad \text{où } B \text{ n'est pas une matrice d'homothétie.}$$

13) En dimension $n \geq 3$, démontrer par récurrence qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice $T_\mathcal{B}$ a pour éléments diagonaux les d_i, $i \in [\![1, n]\!]$.

4 – Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que t est un endomorphisme de X vérifiant $\mathrm{Tr}(t) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{Tr}(t) \geq \mathrm{rg}(t)$. On pose $\rho = \mathrm{rg}(t)$ et $\theta = \mathrm{Tr}(t)$.

14) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $T_\mathcal{B}$ est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix}$$

où T_1 est une matrice de taille $\rho \times \rho$.

Supposons tout d'abord que T_1 ne soit pas la matrice d'une homothétie.

15) À l'aide de la question **13** montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle

$$T_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} T_1' & 0 \\ T_2' & 0 \end{pmatrix}$$

où T_1' admet comme termes diagonaux des entiers naturels non nuls d_i, $i \in [\![1, \rho]\!]$.

16) En déduire que t est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

On suppose maintenant que T_1 est la matrice d'une homothétie.

17) Démontrer que, là encore, t est la somme d'un nombre fini de projecteurs. Conclure.