Problème A

Partie I

1) Les matrices de G sont toutes inversibles par définition (car $1 \neq 0$!), donc G est une partie de $GL_2(\mathbb{R})$, non vide (par exemple $I_2 \in G$), stable par multiplication et passage à l'inverse (banal grâce aux propriétés du déterminant). G est donc un sous-groupe du groupe $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$. G n'est pas commutatif : par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\boxed{(G, \times) \text{ est un groupe non commutatif.}}$$

2) a) A étant une matrice carrée d'ordre 2 et de déterminant 1, son polynôme caractéristique est $\chi_A = X^2 - tX + 1$, de discriminant $\Delta = t^2 - 4$. Quatre cas se présentent :

* si $|t| < 2$: χ_A admet deux racines complexes conjuguées de module 1, seule $\mu = \dfrac{t + i\sqrt{4 - t^2}}{2}$ vérifie $\operatorname{Im} \mu \geq 0$;
* si $|t| = 2$: χ_A admet une racine double, $\mu = 1$ si $t = 2$, $\mu = -1$ si $t = -2$;
* si $t < -2$: χ_A admet deux racines réelles négatives, distinctes et de produit 1, l'une est dans $]-\infty, -1[$, l'autre dans $]-1, 0[$, $\mu = \dfrac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2}$;
* si $t > 2$: χ_A admet deux racines réelles positives, distinctes et de produit 1, l'une est dans $]0, 1[$, l'autre dans $]1, +\infty[$, $\mu = \dfrac{t - \sqrt{t^2 - 4}}{2}$;

Dans tous les cas, j'ai trouvé une unique valeur propre μ telle que $|\mu| \leq 1$ et $\operatorname{Im} \mu \geq 0$.

b) Il est apparu lors de l'étude précédente que μ était de module 1 dans les deux premiers cas, de module strictement inférieur à 1 dans les deux derniers. Ainsi

$$\boxed{|\mu| = 1 \text{ si et seulement si } t \in [-2, 2].}$$

3) Je remarque que, en notant (λ, μ) un système de valeurs propres de A, j'ai $\lambda + \mu = t$ (où $t = \operatorname{Tr} A$) et $\lambda\mu = \det A = 1$; or A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ et il en résulte que $\operatorname{Tr} A^2 = \lambda^2 + \mu^2 = (\lambda + \mu)^2 - 2\lambda\mu = t^2 - 2$ et $\det A^2 = \lambda^2\mu^2 = 1$; d'où $\chi_{A^2}(X) = X^2 - (t^2 - 2)X + 1$ et 1 est valeur propre de A^2 si et seulement si $4 - t^2 = 0$, soit si et seulement si $t = \pm 2$. Je peux alors conclure grâce à l'étude du **2)a)** :

$$\boxed{1 \in \operatorname{Sp} A^2 \text{ si et seulement si } A \text{ admet } 1 \text{ ou } -1 \text{ pour valeur propre double.}}$$

4) a) Le cas $|t| < 2$ est tout trouvé : deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$, aucune dans $\mathbb{R}$. Par exemple

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \text{ pas dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

b) Les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisables sont les matrices M qui admettent une valeur propre double λ, telle que $M \neq \lambda I_2$. D'après ce qui précède,

$$\boxed{\text{Les matrices de } G \text{ non diagonalisables dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ sont les } A \in G \text{ telles que } \operatorname{tr} A = \pm 2 \text{ et } A \neq \pm I_2.}$$

Partie II

1) a) $(E_{\alpha,\beta})$ est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre deux, dont les coefficients sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Comme en outre le coefficient de y'' ne s'annule pas, le théorème de Cauchy s'applique :

$$\boxed{\text{Il existe un unique couple } (C, S) \text{ de } \mathcal{S}_{\alpha,\beta} \text{ vérifiant les conditions initiales de l'énoncé.}}$$

b) Le wronskien $W(x) = \begin{vmatrix} C(x) & S(x) \\ C'(x) & S'(x) \end{vmatrix}$ est soit jamais, soit toujours nul, selon que (C, S) est, ou pas, un système fondamental de solutions de $(E_{\alpha,\beta})$. Or, par construction, $W(0) = 1$. Par conséquent,

$$\boxed{(C, S) \text{ est une base de } S_{\alpha,\beta}.}$$

Soit donc $y = \gamma C + \sigma S$ un élément de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$. Les conditions initiales imposées à C et S donnent immédiatement $y(0) = \gamma$ et $y'(0) = \sigma$:

$$\boxed{\forall y \in S_{\alpha,\beta} \quad y = y(0)\, C + y'(0)\, S.}$$

c) *A priori* C et S sont à valeurs dans $\mathbb{C}$, soient donc $\overline{C} : x \mapsto \overline{C(x)}$ et $\overline{S} : x \mapsto \overline{S(x)}$. Comme $(E_{\alpha,\beta})$ est à coefficients réels, $\overline{C}$ (*resp.* $\overline{S}$) est aussi solution de $(E_{\alpha,\beta})$ et vérifie les mêmes conditions initiales que C (*resp.* S). Donc, par unicité de la solution du problème de Cauchy, $C = \overline{C}$ et $S = \overline{S}$. Autrement dit

$$\boxed{C \text{ et } S \text{ sont à valeurs dans } \mathbb{R}.}$$

d) $(E_{\alpha,0})$ est l'équation différentielle $y'' + \alpha y = 0$ dont la résolution est banale. Il vient

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \alpha < 0, \text{ alors } C_\alpha(x) = \operatorname{ch}\sqrt{-\alpha}x \text{ et } S_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\operatorname{sh}\sqrt{-\alpha}x. \\ \text{Si } \alpha = 0, \text{ alors } C_\alpha(x) = 1 \text{ et } S_\alpha(x) = x. \\ \text{Si } \alpha > 0, \text{ alors } C_\alpha(x) = \cos\sqrt{\alpha}x \text{ et } S_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sin\sqrt{\alpha}x. \end{array}}$$

2) a) Si je suppose $M > 0$ et n dans $\mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |U_{n-1}(x)| \leq \frac{M^{n-1}|x|^{n-1}}{(n-1)!}$$

soit bornée sur $\mathbb{R}$, j'en déduis par définition de U_n que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |U_n(x)| \leq \frac{2}{\omega} \cdot \frac{M^{n-1}}{(n-1)!}\left|\int_0^x |t|^{n-1}\,\mathrm{d}t\right| = \frac{2}{\omega} \cdot \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{|x|^n}{n}.$$

Par conséquent, en choisissant $M = \dfrac{2}{\omega}$, la majoration précédente montre que

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \quad |U_{n-1}(x)| \leq \frac{M^{n-1}|x|^{n-1}}{(n-1)!}\right) \Rightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R} \quad |U_n(x)| \leq \frac{M^n|x|^n}{n!}\right).$$

L'initialisation pour $n = 0$ étant banale, il en résulte par récurrence que

$$\boxed{\text{Pour } M = \frac{2}{\omega}, \text{ on a : } \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |U_n(x)| \leq \frac{M^n|x|^n}{n!}.}$$

b) Soit $A > 0$; la question précédente montre que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{[-A,A]} |U_n| \leq \frac{M^n A^n}{n!}.$$

Or la série numérique $\sum \dfrac{(MA)^n}{n!}$ converge (série exponentielle, de somme e^{MA}). Par conséquent, la série de fonctions $\sum U_n$ converge normalement sur $[-A, A]$, *a fortiori*

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum U_n \text{ converge uniformément sur } [-A, A], \text{ pour tout } A > 0.}$$

U_0 est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et une récurrence immédiate montre qu'il en est de même de U_n, pour tout n. En effet je peux écrire

$$U_n(x) = \frac{\sin\omega x}{\omega}\int_0^x \cos\omega t\ 2\cos 2t\ U_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{\cos\omega x}{\omega}\int_0^x \sin\omega t\ 2\cos 2t\ U_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t,$$

donc U_{n-1} $\mathcal{C}^\infty$ implique U_n $\mathcal{C}^\infty$. En particulier les U_n sont continues sur $[-A, A]$ et, comme $\sum U_n$ converge uniformément sur $[-A, A]$, la fonction somme g est continue sur $[-A, A]$, cela pour tout $A > 0$. En conclusion,

$$\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

c) Fixons x dans $\mathbb{R}$. Soit, pour tout n de $\mathbb{N}$, V_n la fonction $t \mapsto \sin[\omega(x-t)] \cdot 2\cos 2t \cdot U_n(t)$.

$\sup\limits_{[0,x]} |V_n| \leq 2\sup\limits_{[0,x]} |U_n|$ et j'ai vu ci-dessus que $\sum U_n$ convergeait normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$, il en résulte que $\sum V_n$ converge uniformément sur le segment $[0, x]$. Je peux donc intégrer terme à terme :

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x V_n(t)\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$\int_0^x \sin[\omega(x-t)] \cdot 2\cos 2t \cdot g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \omega U_{n+1}(x) = \omega \cdot \big(g(x) - U_0(x)\big).$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \cos \omega x + \frac{1}{\omega}\int_0^x \sin[\omega(x-t)] \cdot 2\cos 2t \cdot g(t)\,\mathrm{d}t.}$$

d) Cela s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) &= \cos \omega x + \frac{1}{\omega}\int_0^x \big(\sin \omega x \cdot \cos \omega t - \cos \omega x \cdot \sin \omega t\big) \cdot 2\cos 2t \cdot g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \cos \omega x + \frac{1}{\omega}\sin \omega x \int_0^x \cos \omega t \cdot 2\cos 2t \cdot g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\omega}\cos \omega x \int_0^x \sin \omega t \cdot 2\cos 2t \cdot g(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

d'où g $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, après simplification,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = -\omega \sin \omega x + \cos \omega x \int_0^x \cos \omega t \cdot 2\cos 2t \cdot g(t)\,\mathrm{d}t + \sin \omega x \int_0^x \sin \omega t \cdot 2\cos 2t \cdot g(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où de même g $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec, compte tenu de $\cos^2 \omega x + \sin^2 \omega x = 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g''(x) = -\omega^2 \cos \omega x + 2\cos 2x \cdot g(x) - \omega \sin \omega x \int_0^x \cos \omega t \cdot 2\cos 2t \cdot g(t)\,\mathrm{d}t + \omega \cos \omega x \int_0^x \sin \omega t \cdot 2\cos 2t \cdot g(t)\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire (si, si !)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g''(x) = \big(2\cos 2x - \omega^2\big) \cdot g(x).$$

En outre, il est apparu que $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$. D'où par unicité

$$\boxed{g \text{ n'est autre que la solution } C \text{ de } (E_{\alpha,1}).}$$

3) a) La linéarité de φ et ψ est banale. Il reste à dire un mot pour justifier que φ et ψ sont bien des applications de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ **dans lui-même**, ce qui découle à peu près immédiatement du fait que $\cos 2x = \cos 2(x+\pi) = \cos 2(x-\pi)$. Finalement, comme en outre $\pi - (\pi - x) = x$,

$$\boxed{\varphi \text{ et } \psi \text{ sont deux endomorphismes de } \mathcal{S}_{\alpha,\beta} \text{ et } \psi \circ \psi = \mathrm{I}_{\mathcal{S}_{\alpha,\beta}}.}$$

b) On reprend la base (C,S) de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ définie au **1)**. Le wronskien $W = CS' - C'S$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$W' = C'S' + CS'' - C''S - C'S' = 0 \quad \text{car } C'' = -bC \quad \text{et} \quad S'' = -bS$$

où $b : x \mapsto \alpha - 2\beta \cos 2x$ est le coefficient de y dans $(E_{\alpha,\beta})$. Par conséquent, W est constante et en particulier $\det A = W(\pi) = W(0) = 1$. Enfin, d'après **1)b)**, les colonnes de A contiennent respectivement les coordonnées dans (C,S) de $\varphi(C)$ et $\varphi(S)$. Autrement dit

$$\boxed{A \in G \text{ et } A = M_{(C,S)}(\varphi).}$$

c) J'ai vu au **a)** que ψ est une symétrie de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$. ψ est donc diagonalisable et ses valeurs propres valent 1 ou –1. Or, toujours d'après **1)b)**,

$$B = M_{(C,S)}(\psi) = \begin{pmatrix} \widehat{C}(0) & \widehat{S}(0) \\ \widehat{C}'(0) & \widehat{S}'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(\pi) & S(\pi) \\ -C'(\pi) & -S'(\pi) \end{pmatrix}$$

donc $\det B = -\det A = -1$. Par conséquent, ψ admet 1 et –1 comme valeurs propres simples (sinon $\psi = \pm \mathrm{I}_{\mathcal{S}_{\alpha,\beta}}$ serait de déterminant 1). Il en résulte que ψ et donc B sont de trace nulle, d'où

$$\boxed{C(\pi) = S'(\pi).}$$

4) a) Avec les notations du **3)**, l'assertion **(ii)** équivaut au fait que 1 ou –1 est valeur propre de φ, c'est-à-dire de A. Or $A \in G$ et nous avons vu à la première partie (**2)a)**, cf. le calcul de χ_A) qu'une matrice de G admet 1 (*resp.* –1) pour valeur propre si et seulement si sa trace vaut 2 (*resp.* –2). Ainsi

$$\boxed{\textbf{(i)} \text{ équivaut à } \textbf{(ii)}.}$$

b) Toujours d'après **3)**, $C(\pi) = S'(\pi)$ et donc $\tau = C(\pi) + S'(\pi) = 2C(\pi)$. Par conséquent, si $\tau = \pm 2$, alors $C(\pi) = \pm 1$ et $C(\pi)S'(\pi) = C(\pi)^2 = 1$, d'où **(iii)**, grâce à $\det A = 1$.

Réciproquement, si je suppose **(iii)**, alors $C(\pi)^2 = 1$, donc $C(\pi) = \pm 1$, d'où $\tau = 2C(\pi) = \pm 2$.

$$\boxed{\textbf{(i)} \text{ et } \textbf{(ii)} \text{ sont également équivalentes à } \textbf{(iii)}.}$$

c) De même, $(E_{\alpha,\beta})$ admet une solution non nulle 2π-périodique si et seulement si 1 est valeur propre de φ^2, c'est à dire de A^2, ce qui équivaut à **(i)** d'après la question **3)** de la première partie.

$$\boxed{(E_{\alpha,\beta}) \text{ admet une solution non nulle } 2\pi\text{-périodique si et seulement si } \tau = \pm 2.}$$

Dans le cas $\beta = 0$, nous avons déterminé C et S au **1)d)**. Il apparaît que :

* pour $\alpha < 0$, $S_\alpha(\pi)\, C'_\alpha(\pi) = \mathrm{sh}^2 \sqrt{-\alpha}\pi \neq 0$: **(iii)** n'est jamais vérifiée ;
* pour $\alpha = 0$, $C_\alpha = 1$ est une solution non nulle 2π-périodique de $(E_{\alpha,\beta})$!
* pour $\alpha > 0$, $S_\alpha(\pi)\, C'_\alpha(\pi) = -\sin^2 \sqrt{\alpha}\pi = 0$ si et seulement si $\sqrt{\alpha} \in \mathbb{Z}$.

En résumé,

$$\boxed{(E_{\alpha,0}) \text{ admet une solution non nulle } 2\pi\text{-périodique si et seulement si } \alpha \text{ est de la forme } n^2,\ n \in \mathbb{N}.}$$

Problème B : algorithme de Panjer

I – Étude et caractérisation des lois vérifiant la relation de récurrence de Panjer

1) Dans le cas $a = 0$, j'ai par définition :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad p_k = \frac{b}{k} p_{k-1}$$

où nécessairement $b \geq 0$ (sinon $p_1 < 0$!) ; par une récurrence immédiate

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad p_k = \frac{b^k}{k!} p_0$$

et la valeur de p_0 est imposée par la condition $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ où je reconnais la série exponentielle : $e^b p_0 = 1$, d'où finalement

$$\boxed{\text{Si } a = 0, \text{ alors } b \in \mathbb{R}^+ \text{ et } N \hookrightarrow \mathcal{P}(b).}$$

2) Compte tenu du rappel, supposant que N suit la loi binomiale négative de paramètres α et p, j'obtiens la fonction génératrice :

$$G_N(t) = (1-p)^\alpha \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots\alpha}{k!} p^k t^k\right] = \frac{(1-p)^\alpha}{(1-pt)^\alpha}$$

cela pour tout t de $]-1/p, 1/p[$ puisque le rayon de convergence de la série entière de l'énoncé vaut 1.

Comme $1/p > 1$, G_N est deux fois dérivable en 1, donc N est admet une espérance et une variance. De plus,

$$E(N) = G'_N(1) = \frac{\alpha p}{1-p} \quad \text{et} \quad E\big(N(N-1)\big) = G''_N(1) = \frac{\alpha(\alpha+1)p^2}{(1-p)^2}$$

d'où, puisque $V(N) = E\left(N^2\right) - E(N)^2 = E(N(N-1)) + E(N) - E(N)^2$,

$$\boxed{E(N) = \frac{\alpha p}{1-p} \quad \text{et} \quad V(N) = \frac{\alpha p}{(1-p)^2}.}$$

3) Pour $\alpha = 1$, on a : $\forall k \in \mathbb{N} \quad p_k = (1-p)\, p^k$. Cela correspond à la loi géométrique de paramètre $1-p$ décalée d'un cran…

$$\boxed{\text{Pour } \alpha = 1, \text{ on a } N+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p).}$$

4) a) La relation (1) donne par une récurrence immédiate, une mise en facteur et une réindexation,

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad p_k = \prod_{j=1}^{k} \left(a + \frac{b}{j}\right) p_0 = \frac{p_0}{k!} \prod_{j=1}^{k} (aj+b) = \frac{p_0}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (a+b+ai)$$

d'où, si a est non nul, en mettant a en facteur partout :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad p_k = p_0 \frac{a^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (\Delta + i) \quad \text{où} \quad \Delta = 1 + \frac{b}{a}.}$$

b) Par conséquent, si $a \in]0,1[$, j'ai

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad p_k = \binom{\Delta + k - 1}{k} a^k p_0$$

et la condition $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ donne

$$p_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Delta + k - 1)(\Delta + k - 2) \cdots \Delta}{k!} a^k \right) = 1 \quad \text{soit} \quad p_0 = (1-a)^{\Delta}$$

d'après le "rappel" sur les séries entières. D'où finalement, en notant $\mathcal{BN}(\alpha, p)$ la loi binomiale négative de paramètres α et p,

$$\boxed{\text{Si } a \in]0,1[, \text{ alors } N \hookrightarrow \mathcal{BN}(\Delta, a).}$$

Noter que $p_1 = (a+b)\, p_0 \geq 0$ et $p_0 > 0$ (sinon tous les p_k seraient nuls alors que leur somme vaut 1 !). D'où $\Delta \geq 0$ mais pour $b = -a$ on aurait $\Delta = 0$. On a implicitement écarté ce cas trivial pour lequel $p_0 = 1$ et tous les autres p_k sont nuls. Moyennant quoi on a bien $\Delta > 0$...

5) Nous supposons ici que les p_k vérifient (1) avec $a < 0$. Rappelons que les p_k doivent être dans $[0,1]$ et de somme 1. Donc p_0 est strictement positif (sinon les p_k seraient tous nuls, donc de somme 0 !). Et $a + \dfrac{b}{k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} a$, ce qui nécessite que l'un des p_k soit nul, sinon ils seraient strictement négatifs à partir d'un certain rang. Je dispose donc de n dans $\mathbb{N}$ tel que

$$a + \frac{b}{n+1} = 0, \quad \text{soit} \quad b = |a|\,(n+1) \;\; (\text{puisque } |a| = -a).$$

Alors $p_{n+1} = 0$ et par récurrence immédiate : $\forall k > n \quad p_k = 0$. Et comme au **4)a)** j'obtiens

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad p_k = p_0 \frac{|a|^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = p_0 \binom{n}{k} |a|^k \quad \text{car} \quad a + b + ai = |a|\,(n-i)$$

et la condition $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1$ donne $p_0\,(|a|+1)^n = 1$ d'où finalement

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad p_k = \binom{n}{k} \frac{|a|^k}{(|a|+1)^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{|a|}{|a|+1} \right)^k \left(\frac{1}{|a|+1} \right)^{n-k}$$

or si je pose $p = \dfrac{|a|}{|a|+1}$ je constate avec ravissement que $1 - p = \dfrac{1}{|a|+1}$! Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } a < 0,\ N \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \text{ avec } n \text{ et } p \text{ définis ci-dessus.}}$$

6) Nous venons de voir qu'une loi vérifiant la relation (1) est, soit une loi binomiale négative (cas $a \in]0,1[$), soit une loi de Poisson (cas $a = 0$), soit une loi binomiale (cas $a < 0$). Réciproquement :

- si $N \hookrightarrow \mathcal{BN}(\alpha, p)$ avec $\alpha > 0$ et $p \in]0,1[$, alors pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$p_k = \frac{(\alpha + k - 1)(\alpha + k - 2) \cdots \alpha}{k!} (1-p)^{\alpha} p^k = \frac{\alpha + k - 1}{k} p \cdot p_{k-1} = \left(p + \frac{p\,(\alpha - 1)}{k} \right) \cdot p_{k-1}$$

  donc N vérifie bien la relation (1), avec $a = p < 1$ et $b = p\,(\alpha - 1)$;

- si $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda}{k} \cdot p_{k-1}$$

  donc N vérifie bien la relation (1), avec $a = 0 < 1$ et $b = \lambda$;

- si $N \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$, alors pour $k \in [\![1,n]\!]$

$$p_k = \frac{n\,(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{1-p} \cdot p_{k-1} = \left(a + \frac{b}{k} \right) \cdot p_{k-1}$$

  avec

$$a = -\frac{p}{1-p} < 0 \quad \text{et} \quad b = (n+1) \frac{p}{1-p} = -a\,(n+1) \quad \text{d'où} \quad a + \frac{b}{n+1} = 0$$

donc $p_{n+1} = 0 = \left(a + \dfrac{b}{n+1}\right) \cdot p_n$ et par récurrence

$$\forall k \geq n+1 \quad p_k = 0 = \left(a + \frac{b}{k}\right) \cdot p_{k-1}.$$

Ainsi N vérifie bien la relation (1), avec les valeurs de a et b ci-dessus.

En conclusion,

$$\boxed{\text{Les lois vérifiant (1) sont les lois binomiales, de Poisson et binomiales négatives.}}$$

7) Pour la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, la variance $np(1-p)$ est inférieure à l'espérance np ; pour la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ la variance λ est égale à l'espérance λ ! Reste donc la loi binomiale négative, pour laquelle (cf. **2)**) la variance est égale à l'espérance multipliée par le coefficient $\dfrac{1}{1-p}$, qui est plus grand que 1 et peut même être très grand si p est voisin de 1.

II – Algorithme de Panjer

Pour commencer, je justifie l'existence de $E(Y|A)$ dès que Y est d'espérance finie, qui semble sous-entendue par l'énoncé. Cela vient du fait que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq kP(Y=k|A) = k\frac{P((Y=k) \cap A)}{P(A)} \leq \frac{kP(Y=k)}{P(A)} = O\big(kP(Y=k)\big)$$

d'où le résultat par comparaison de séries à termes positifs.

1) a) Notons que l'espérance conditionnellement à A n'est autre que l'espérance pour la probabilité conditionnelle P_A définie dans le cours. Elle vérifie donc les propriétés habituelles de l'espérance, notamment la linéarité. Or, les U_k jouant des rôles symétriques, j'ai

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad E(U_k|S_n=j) = E(U_1|S_n=j)$$

d'où par linéarité $E(S_n|S_n=j) = nE(U_1|S_n=j)$. Or trivialement $E(S_n|S_n=j) = j$! D'où

$$\boxed{E(U_1|S_n=j) = \frac{j}{n}.}$$

b) Par définition de la probabilité conditionnelle et par indépendance des U_k,

$$P(U_1=k|S_n=j) = \frac{P\left((U_1=k) \cap \left(\sum_{k=2}^{n} U_k = j-k\right)\right)}{P(S_n=j)} = \frac{P(U_1=k) \cdot P\left(\sum_{k=2}^{n} U_k = j-k\right)}{P(S_n=j)}$$

or, toujours du fait des rôles symétriques des U_k, j'ai

$$P\left(\sum_{k=2}^{n} U_k = j-k\right) = P(S_{n-1} = j-k),$$

d'où, avec les notations de l'énoncé :

$$\boxed{P(U_1=k|S_n=j) = \frac{q_k \cdot q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*n}}.}$$

2) Les $(N=k)$, $k \in \mathbb{N}$, forment un système complet d'événements, d'où grâce à la formule des probabilités totales

$$P(X=0) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N=k)\,P(X=0|N=k)$$

or, puisque les U_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$P(X=0|N=k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k} (U_i=0)\right) = q_0^k$$

par indépendance mutuelle des U_i qui suivent la même loi. Noter que ce résultat est correct aussi pour $k=0$. En conclusion

$$\boxed{r_0 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k q_0^k.}$$

3) Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Toujours grâce à la formule des probabilités totales, et par définition de X, sachant que puisque $j > 0$ j'ai $P(X = j|N = 0) = 0$:

$$r_j = P(X = j) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) P(X = j|N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) P(S_n = j) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n q_j^{*n}.$$

Finalement, grâce à la relation (1), au **1)a)** et à la linéarité de l'espérance,

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^* \quad r_j = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + bE\left(\frac{U_1}{j} \middle| S_n = j \right) \right) p_{n-1} q_j^{*n}.}$$

4) J'utilise à nouveau la formule des probabilités totales, avec comme système complet d'événements les $(U_n = k)$, $k \in \mathbb{N}$:

$$P(S_n = j) = \sum_{k=0}^{\infty} P(U_n = k) P(S_n = j|U_n = k).$$

Les termes sont tous nuls pour $k > j$ (car $S_n \geq U_n$ par définition). De plus nous avons déjà remarqué que

$$\forall k \in [\![0, j]\!] \quad P(S_n = j|U_n = k) = P(S_{n-1} = j - k)$$

d'où finalement

$$\boxed{\text{Pour } j \in \mathbb{N} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*,\ q_j^{*n} = \sum_{k=0}^{j} q_k q_{j-k}^{*(n-1)}.}$$

5) Fixons j dans $\mathbb{N}^*$. Par définition de l'espérance et grâce au **1)b)**, j'ai

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad E\left(\frac{U_1}{j} \middle| S_n = j \right) = \sum_{k=0}^{j} \frac{k}{j} P(U_1 = k|S_n = j) = \sum_{k=0}^{j} \frac{k}{j} \frac{q_k \cdot q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*n}}$$

d'où, en reportant dans la relation du **3)** et en simplifiant par q_j^{*n} :

$$r_j = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a p_{n-1} q_j^{*n} + \sum_{k=0}^{j} \frac{bk}{j} q_k q_{j-k}^{*(n-1)} p_{n-1} \right).$$

Puis je remplace q_j^{*n} par l'expression obtenue au **4)** et je regroupe :

$$r_j = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} \left(a + \frac{bk}{j} \right) q_k q_{j-k}^{*(n-1)} p_{n-1} \right).$$

Comme j'ai une somme finie de séries convergentes, je peux intervertir les sommes :

$$r_j = \sum_{k=0}^{j} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{bk}{j} \right) q_k q_{j-k}^{*(n-1)} p_{n-1}.$$

Je mets en facteur ce qui ne dépend pas de n et je réindexe la dernière somme :

$$r_j = \sum_{k=0}^{j} \left(a + \frac{bk}{j} \right) q_k \sum_{n=0}^{\infty} p_n q_{j-k}^{*n}.$$

Or par définition

$$q_0^{*0} = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbb{N}^* \quad q_j^{*0} = 0.$$

Ainsi, en mettant à part le terme pour $k = j$ dans la somme précédente, j'obtiens

$$r_j = (a + b) q_j \sum_{n=0}^{\infty} p_n q_0^{*n} + \sum_{k=0}^{j-1} \left(a + \frac{bk}{j} \right) q_k \sum_{n=1}^{\infty} p_n q_{j-k}^{*n} = (a + b) q_j r_0 + \sum_{k=0}^{j-1} \left(a + \frac{bk}{j} \right) q_k r_{j-k}$$

d'après **2)** pour la valeur de r_0 et grâce au **3)** où il est apparu que

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \quad r_j = \sum_{n=1}^{\infty} p_n q_j^{*n} \quad \text{(où je peux remplacer } j \text{ par } j - k \text{ tant que } k < j\text{)}.$$

J'obtiens ainsi une relation vérifiée par r_j, qui figure aussi au second membre (pour $k = 0$) :

$$r_j = (a + b) q_j r_0 + a q_0 r_j + \sum_{k=1}^{j-1} \left(a + \frac{bk}{j} \right) q_k r_{j-k}.$$

Or le premier terme $(a+b)\,q_j r_0$ s'intègre harmonieusement dans la somme (pour $k=j$) :

$$(1-aq_0)\,r_j=\sum_{k=1}^{j}\left(a+\frac{bk}{j}\right)q_k r_{j-k}.$$

Je peux (enfin !) diviser par $1-aq_0$ puisque $a<1$ et $q_0\in[0,1]$, d'où $aq_0<1$.

$$\boxed{\forall j\in\mathbb{N}^*\quad r_j=C\sum_{k=1}^{j}\left(a+\frac{bk}{j}\right)q_k r_{j-k}\quad\text{où}\quad C=\frac{1}{1-aq_0}.}$$

Il s'agit bien d'une relation de récurrence permettant de calculer de proche en proche les r_j, puisqu'elle donne r_j en fonction de $r_0,\ldots,r_{j-1}$. Toutefois on n'a en général qu'une valeur approchée de r_0...