D.L. 6

Problème A

Dans tout le problème, G désigne l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de déterminant 1.
Si α est un réel et β un élément de $\{0,1\}$, on note $(E_{\alpha,\beta})$ l'équation différentielle

$$y''(x) + (\alpha - 2\beta\cos 2x)\cdot y(x) = 0$$

et $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ l'ensemble de ses solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Partie I

1) Montrer que G est un groupe non commutatif pour la multiplication des matrices.

2) Soit $A \in G$. On note t sa trace.

a) Montrer que A admet une unique valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ vérifiant : $|\mu| \leq 1$ et $\operatorname{Im}\mu \geq 0$.
On exprimera μ en fonction de t.

b) Prouver que : $|\mu| = 1 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 2$.

3) Soit $A \in G$. Prouver que 1 est valeur propre de A^2 si et seulement si A admet une seule valeur propre complexe égale à 1 ou à -1.

4) a) Donner un exemple de matrice de G diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais non diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Préciser toutes les matrices de G qui ne sont pas diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Partie II

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \{0,1\}$.

a) Montrer qu'il existe un unique couple (C,S) d'éléments de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ vérifiant

$$C(0) = 1,\ C'(0) = 0 \quad \text{et} \quad S(0) = 0,\ S'(0) = 1.$$

Ces fonctions dépendent bien sûr de α, β.

b) Montrer que (C,S) est une base de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ et déterminer les coordonnées d'un élément y de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ dans cette base.

c) Montrer que C et S sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

d) Dans la suite, on note C_α et S_α les fonctions C et S précédentes dans le cas où $\beta = 0$. Déterminer ces fonctions C_α et S_α.

2) Dans cette question seulement, on suppose $\alpha > 0$ et $\beta = 1$. On pose $\alpha = \omega^2$ avec $\omega > 0$.
On définit la suite de fonctions $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad U_0(x) = \cos\omega x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n(x) = \frac{1}{\omega}\int_0^x \sin[\omega(x-t)]\ 2\cos 2t\ U_{n-1}(t)\mathrm{d}t.$$

a) Trouver une constante M telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |U_n(x)| \leq \dfrac{M^n\,|x|^n}{n!}$.

b) Montrer que la série de fonctions $\sum U_n$ converge uniformément sur tout segment $[-A, A]$, avec $A > 0$.
On note g sa somme. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Établir :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \cos\omega x + \frac{1}{\omega}\int_0^x \sin[\omega(x-t)]\ 2\cos 2t\ g(t)\mathrm{d}t.$$

d) Montrer que g est égale à la solution C de $(E_{\alpha,1})$.

3) Pour tout y de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ on pose : $\tilde{y} : x \mapsto y(\pi + x)$ et $\hat{y} : x \mapsto y(\pi - x)$
et l'on définit les applications $\varphi : y \mapsto \tilde{y}$ et $\psi : y \mapsto \hat{y}$.

a) Montrer que φ et ψ sont deux endomorphismes de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ et calculer $\psi \circ \psi$.

b) On note A la matrice $\begin{pmatrix} C(\pi) & S(\pi) \\ C'(\pi) & S'(\pi) \end{pmatrix}$.

Montrer que $A \in G$ (on pourra utiliser la fonction $W : x \mapsto \begin{vmatrix} C(x) & S(x) \\ C'(x) & S'(x) \end{vmatrix}$) et montrer que A est la matrice de φ dans une certaine base de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ que l'on précisera.

c) Montrer que ψ est diagonalisable. Déterminer la matrice B de ψ dans la base (C, S) et les valeurs propres de ψ. En déduire que : $S'(\pi) = C(\pi)$.

4) On note τ la trace de la matrice A précédente.

a) Établir l'équivalence des propositions suivantes :

(**i**) $\tau = 2$ ou $\tau = -2$;
(**ii**) $(E_{\alpha,\beta})$ admet une solution non nulle π-périodique ou une solution non nulle π-antipériodique (c'est-à-dire vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R} \quad y(\pi + x) = -y(x)$).

b) Montrer que les propositions (**i**) et (**ii**) sont aussi équivalentes à :

(**iii**) $S(\pi)C'(\pi) = 0$.

c) Montrer que $(E_{\alpha,\beta})$ admet une solution non nulle 2π-périodique si et seulement si

$$\tau = 2 \quad \text{ou} \quad \tau = -2.$$

Déterminer les réels α pour lesquels $(E_{\alpha,0})$ admet une solution non nulle 2π-périodique.

Problème B : algorithme de Panjer

Introduction

La première partie est consacrée à la caractérisation des lois vérifiant la relation dite de Panjer.
La seconde partie présente l'algorithme de Panjer qui permet de calculer certaines sommes aléatoires de variables aléatoires discrètes.

I – Étude et caractérisation des lois vérifiant la relation de récurrence de Panjer

On représente le nombre d'accidents à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée par une variable aléatoire discrète N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est décrite par les $p_k = P(N = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Parmi ces distributions on s'intéressera ici à celles vérifiant la relation de récurrence, dite *de Panjer* :

$$\exists a < 1 \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}. \tag{1}$$

Le but de cette partie est de caractériser les lois vérifiant (1).
Rappelons que la loi de Poisson de paramètre λ est décrite par

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

et que la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ est décrite par

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \text{et} \quad p_k = 0 \text{ pour } k > n.$$

Rappelons enfin ce résultat sur les séries entières, pour $c \in \mathbb{R}$ et $t \in]-1, 1[$:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c(c+1)\cdots(c+k-1)}{k!} \cdot t^k = \frac{1}{(1-t)^c}$$

1) Montrer que si N vérifie (1) et que $a = 0$, alors N suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

2) On définit la distribution *binomiale négative* de paramètres $\alpha > 0$ et $p \in]0,1[$ par
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad p_k = \binom{\alpha + k - 1}{k} (1-p)^{\alpha} p^k$$
où *les coefficients binomiaux généralisés* sont définis par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \binom{x}{0} = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$
Calculer sa moyenne et sa variance en fonction de α et de p.

3) Quelle distribution obtient-on lorsque $\alpha = 1$?

4) **a)** Lorsque N vérifie la relation de récurrence (1) avec $a \neq 0$, montrer que, pour tout k dans $\mathbb{N}$,
$$p_k = p_0 \frac{a^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (\Delta + i)$$
pour un certain Δ à préciser.

b) En déduire que, pour $a \in]0,1[$, N suit une loi binomiale négative dont on précisera les paramètres.

5) Montrer que, pour $a < 0$, N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

6) Conclure que les lois vérifiant la relation (1) sont exactement les lois de Poisson, binomiales et binomiales négatives.

7) Parmi ces trois types de distributions, lequel choisir pour modéliser la loi de N si une étude statistique montre que la variance estimée de N est beaucoup plus grande que la moyenne estimée de N ?

II – Algorithme de Panjer

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire $X = \sum_{k=1}^{N} U_k$ où N et les U_k, $k \in \mathbb{N}$, sont des variables aléatoires à valeurs entières.

La somme est nulle par convention lorsque $N = 0$.

De plus les U_k sont indépendantes, de loi commune décrite par les $q_k = P(U_i = k)$, et indépendantes de N. On suppose que les U_k admettent une espérance.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ (en particulier $S_0 = 0$).

Définissons enfin l'espérance d'une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ *conditionnellement à un événement* A par :
$$E(Y|A) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(Y = k|A) \text{ (sous réserve de convergence).}$$

1) **a)** Montrer que, pour j dans $\mathbb{N}$ et n dans $\mathbb{N}^*$,
$$E(U_1 | S_n = j) = \frac{j}{n}.$$

b) Définissons, pour $j \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, les probabilités
$$q_j^{*n} = P(S_n = j).$$

Montrer que, pour j, k dans $\mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P(U_1 = k | S_n = j) = \frac{q_k q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*n}}.$$

Supposons dans la suite de cette partie que N vérifie la relation (1) de la partie **I**.

2) Soit $r_k = P\left(X = k\right)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Exprimer r_0 en fonction des q_k et des p_k.

3) À l'aide des questions précédentes, montrer que pour $j \in \mathbb{N}^*$,

$$r_j = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + bE\left(\frac{U_1}{j} \,\middle|\, S_n = j \right) \right) p_{n-1} q_j^{*n}.$$

4) Établir pour $j \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$q_j^{*n} = \sum_{k=0}^{j} q_k q_{j-k}^{*(n-1)}.$$

5) Déduire des résultats précédents la relation de récurrence appelée *algorithme de Panjer* :

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \quad r_j = C \sum_{k=1}^{j} \left(a + \frac{bk}{j} \right) q_k r_{j-k}$$

où C est une constante à préciser.