Partie I – Endomorphisme antisymétrique

1) Soit $(X,Y)\in E^2$; je développe, par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire :
$$\langle u(X+Y), X+Y\rangle = \langle u(X), X\rangle + \langle u(X), Y\rangle + \langle u(Y), X\rangle + \langle u(Y), Y\rangle$$
d'où, en appliquant l'hypothèse à $X+Y$, X et Y : $0 = \langle u(X), Y\rangle + \langle u(Y), X\rangle$. Ainsi :
$$\boxed{\forall (X,Y)\in E\times E \quad \langle u(X), Y\rangle = -\langle X, u(Y)\rangle.}$$

2) a) Soit λ valeur propre réelle de u et X un vecteur propre associé ; j'ai d'une part $\langle u(X), X\rangle = 0$ et d'autre part $\langle u(X), X\rangle = \lambda\|X\|^2$. Comme X est non nul par construction, j'en déduis que $\lambda = 0$:
$$\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre réelle possible de } u.}$$

b) Comme E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, le polynôme caractéristique de u est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 3, qui s'annule donc au moins une fois sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Par conséquent :
$$\boxed{\text{Le polynôme caractéristique de } u \text{ a au moins une racine réelle.}}$$
Les deux derniers résultats montrent que le spectre de u est $\{0\}$. Donc $\operatorname{Ker} u$ est de dimension au moins égale à 1 ; ainsi, puisque u est non nul par hypothèse :
$$\boxed{\operatorname{Ker} u \text{ est de dimension 1 ou 2.}}$$

3) Déjà, d'après le théorème du rang, $\dim\operatorname{Ker} u + \dim\operatorname{Im} u = 3$. Je montre en outre que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont orthogonaux : soient $X\in\operatorname{Ker} u$ et $Z = u(Y)\in\operatorname{Im} u$; j'ai
$$\langle X, Z\rangle = \langle X, u(Y)\rangle = -\langle u(X), Y\rangle = 0 \quad \text{car} \quad X\in\operatorname{Ker} u.$$
Ainsi, $\operatorname{Ker} u \subset (\operatorname{Im} u)^\perp$; d'où, compte tenu des dimensions :
$$\boxed{\operatorname{Ker} u \text{ et } \operatorname{Im} u \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } E.}$$

4) a) Avant tout, $\operatorname{Im} u$ étant stable par u et X élément de $\operatorname{Im} u$, $u(X)$ est également élément de $\operatorname{Im} u$. De plus, X étant non nul, si $(X, u(X))$ était une famille liée, X serait vecteur propre de u, donc élément de $\operatorname{Ker} u$, puisque 0 est la seule valeur propre de u ; ceci est absurde car $\operatorname{Im} u\cap\operatorname{Ker} u = \{0\}$ d'après la question précédente. En conclusion,
$$\boxed{(X, u(X)) \text{ est une famille libre de } \operatorname{Im} u.}$$

b) u étant non nul, $\operatorname{Im} u$ contient des vecteurs non nuls, donc, d'après la question précédente, $\operatorname{Im} u$ contient des familles libres de deux vecteurs, d'où $\dim\operatorname{Im} u \geq 2$; or j'ai déjà vu que $\dim\operatorname{Ker} u\geq 1$, par conséquent, puisqu'ils sont supplémentaires :
$$\boxed{\dim\operatorname{Im} u = 2 \quad \text{et} \quad \dim\operatorname{Ker} u = 1.}$$

5) Soit (e_1, e_2) une base orthonormale de $\operatorname{Im} u$ et e_3 un vecteur unitaire de $\operatorname{Ker} u$. D'après les questions précédentes, (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale de E. Par définition, $u(e_1)$ est dans $\operatorname{Im} u$, donc
$$u(e_1) = \langle u(e_1), e_1\rangle\cdot e_1 + \langle u(e_1), e_2\rangle\cdot e_2 = \alpha e_2$$
où j'ai posé $\alpha = \langle u(e_1), e_2\rangle$; de même, en utilisant **1)**,
$$u(e_2) = \langle u(e_2), e_1\rangle\cdot e_1 + \langle u(e_2), e_2\rangle\cdot e_2 = -\alpha e_1$$
Cela me donne les deux premières colonnes de la matrice de u dans (e_1, e_2, e_3), et $e_3\in\operatorname{Ker} u$, donc la troisième colonne est nulle :
$$\boxed{\text{La matrice de } u \text{ dans la base orthonormale } (e_1, e_2, e_3) \text{ est } B.}$$

6) a) Grâce au résultat précédent, j'obtiens :
$$u^2(e_1) = -\alpha^2 e_1 \ ; \ u^2(e_2) = -\alpha^2 e_2 \ ; \ u^2(e_3) = 0.$$
La matrice de u^2 dans (e_1, e_2, e_3) est donc $-\alpha^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Ainsi :
$$\boxed{u^2 = -\alpha^2 p \text{ où } p \text{ est la projection orthogonale sur } \operatorname{Vect}(e_1, e_2) = \operatorname{Im} u.}$$

b) Soit $m \in \mathbb{N}$; d'après **a)** : $u^{2m} = \left(u^2\right)^m = (-1)^m \alpha^{2m} p^{2m}$; or, comme $p^2 = p$, il vient par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p^n = p \quad (\text{tandis que } p^0 = \mathrm{I}_E \ \ldots).$$

D'où

$$u^{2m} = (-1)^m \alpha^{2m} p \quad \text{et} \quad u^{2m+1} = u^{2m} \circ u = (-1)^m \alpha^{2m} u \ ;$$

en effet $p \circ u = u$ puisque les vecteurs de $\operatorname{Im} u$ sont invariants par p. En conclusion :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^* \quad u^{2m} = (-1)^m \alpha^{2m} p \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad u^{2m+1} = (-1)^m \alpha^{2m} u.}$$

7) a) D'après le résultat précédent, j'obtiens immédiatement :

$$\boxed{\begin{gathered} \sum_{k=0}^{N} \frac{u^k}{k!} = \mathrm{I}_E + C_N(\alpha)\, p + S_N(\alpha)\, u \quad \text{où} \\ C_N(\alpha) = \sum_{m=1}^{E(N/2)} (-1)^m \frac{\alpha^{2m}}{(2m)!} \quad \text{et} \quad S_N(\alpha) = \sum_{m=0}^{E((N-1)/2)} (-1)^m \frac{\alpha^{2m}}{(2m+1)!} \end{gathered}}$$

b) Je reconnais — à quelques détails près — les développements en série entière des fonctions cos et sin. Précisément, sachant que α est non nul (sinon u serait nul) :

$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} C_N(\alpha) = \cos\alpha - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{N \to +\infty} S_N(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}.}$$

c) $\mathrm{I}_E + C(\alpha)\, p + S(\alpha)\, u$ a pour matrice dans (e_1, e_2, e_3) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (\cos\alpha - 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Je reconnais une matrice de rotation :

$$\boxed{\exp(u) \text{ est la rotation d'axe orienté par } e_3 \text{ et d'angle } \alpha.}$$

Partie II – Système différentiel

1) a) Supposons (x, y, z) solution de S ; la seconde équation montre que y est de classe $\mathcal{C}^2$ et en la dérivant, j'obtiens $y''(t) = \alpha x'(t) = -\alpha^2 y(t)$ d'après la première équation, d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} y''(t) + \alpha^2 y(t) = 0 \\ x(t) = y'(t)/\alpha \\ z'(t) = 0 \end{array} \right. .$$

Réciproquement, soit (x, y, z) vérifiant le système ci-dessus ; la deuxième équation me donne $y'(t) = \alpha x(t)$ en multipliant par α et $x'(t) = -\alpha y(t)$ en dérivant et en tenant compte de la première équation. Finalement :

$$\boxed{S \text{ est équivalent à } \left\{ \begin{array}{l} y''(t) + \alpha^2 y(t) = 0 \\ x(t) = y'(t)/\alpha \\ z'(t) = 0 \end{array} \right. .}$$

b) Or la résolution de ce dernier système est immédiate :

$$\boxed{(x, y, z) \text{ est solution de } S \text{ si et seulement si : } \exists (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \lambda \cos(\alpha t + \mu) \\ y(t) = \lambda \sin(\alpha t + \mu) \\ z(t) = \nu \end{array} \right. .}$$

c) Vu le résultat ci-dessus :

$$\boxed{\text{Les trajectoires solutions sont les cercles d'axe } Oz\ .}$$

(Y compris les singletons formés d'un point de Oz, pour $\lambda = 0$; ce sont bien les cercles entiers puisque α est non nul par hypothèse).

2) a) Il suffit de faire le calcul… En fait, pour la suite, je préfère remarquer que $u(X) = \Omega \wedge X$ où $\Omega = (c, -b, a)$; ainsi $u(X)$ est orthogonal à X :

$$\boxed{\text{Pour tout } X \text{ de } E,\ \langle u(X), X\rangle = 0.}$$

b) Grâce à la remarque précédente et grâce au **I-3)**, j'obtiens :

$$\boxed{\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(c, -b, a) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} u \ / \ cx - by + az = 0.}$$

c) D'après le **I**, je dispose d'un réel non nul α et d'une matrice orthogonale P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui n'est autre que la matrice de S, pour un certain α non nul. Alors :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ est solution de } S_g \text{ si et seulement si } P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ est solution de } S.}$$

Autrement dit, j'obtiens les solutions de S_g en multipliant par P celles de S.

d) D'après la question précédente, les trajectoires solutions de S_g sont les images de celles de S par l'automorphisme orthogonal de matrice P, qui transforme le troisième vecteur de la base canonique en un vecteur unitaire de $\operatorname{Ker} u$, donc colinéaire à Ω. Il en résulte que :

$$\boxed{\text{Les trajectoires solutions de } S_g \text{ sont les cercles d'axe } O + \operatorname{Vect}(\Omega).}$$

3) a) Comme au **2)a)**, je constate que :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega(t)} = \big(c(t), -b(t), a(t)\big) \text{ vérifie : } \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\Omega(t)} \wedge \overrightarrow{OM(t)}.}$$

b) En particulier, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OM(t)}$ pour tout t ; donc la dérivée de $t \mapsto \left\|\overrightarrow{OM(t)}\right\|^2$ est nulle : la distance $OM(t)$ est constante ; autrement dit :

$$\boxed{\text{La courbe décrite par } M(t) \text{ est tracée sur une sphère de centre } O.}$$

4) a) Supposons (x, y, z) solution de S_g ; les deux premières équations montrent que x et y sont de classe $\mathcal{C}^2$ et alors la troisième montre que z est de classe $\mathcal{C}^3$ (en fait, une récurrence montrerait que x, y, z sont de classe $\mathcal{C}^\infty$). De plus, j'obtiens successivement en omettant les (t) pour plus de lisibilité :

$$z'' = -x\cos t - y\sin t - x'\sin t + y'\cos t = -x\cos t - y\sin t - z$$

en dérivant la troisième, puis en utilisant les deux premières équations ; je "redérive" :

$$z''' = x\sin t - y\cos t - x'\cos t - y'\sin t - z' = -2z'$$

d'après les trois équations…

$$\boxed{\text{Si } (x, y, z) \text{ est solution de } S_g, \text{ alors } z \text{ est de classe } \mathcal{C}^3 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } z'' + 2z \text{ est constant.}}$$

b) Soit (x, y, z) solution de S_g ; je viens de voir que $z'' + 2z$ est une constante, que j'appelle 2ν. Alors $z = \nu$ est une solution (particulière !) de $z'' + 2z = 2\nu$; par conséquent, la solution générale de l'équation homogène associée $z'' + 2z = 0$ pouvant s'écrire classiquement sous la forme $\lambda\cos\big(t\sqrt{2} + \mu\big)$, j'obtiens

$$z = \lambda\cos\Big(t\sqrt{2} + \mu\Big) + \nu \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Alors j'ai nécessairement, en reprenant la troisième équation de S_g et le calcul du **a)** :

$$\begin{cases} -x\sin t + y\cos t = z' = -\lambda\sqrt{2}\sin\big(t\sqrt{2} + \mu\big) \\ x\cos t + y\sin t = -z'' - z = z - 2\nu = \lambda\cos\big(t\sqrt{2} + \mu\big) - \nu \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x = \lambda\left[\cos t \cdot \cos\big(t\sqrt{2} + \mu\big) + \sqrt{2}\sin t \cdot \sin\big(t\sqrt{2} + \mu\big)\right] - \nu\cos t \\ y = \lambda\left[\sin t \cdot \cos\big(t\sqrt{2} + \mu\big) - \sqrt{2}\cos t \cdot \sin\big(t\sqrt{2} + \mu\big)\right] - \nu\sin t \end{cases}$$

et, réciproquement, je vérifie aisément que :

$$x' = z\sin t \quad \text{et} \quad y' = -z\cos t,$$

la troisième équation $-x\sin t + y\cos t = z'$ étant satisfaite par construction.

J'ai donc exactement déterminé les solutions de S_g :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La solution générale de } S_g \text{ s'écrit, avec } (\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3 :\\ \left\{\begin{array}{l} x=\lambda\left[\cos t\cdot\cos\left(t\sqrt{2}+\mu\right)+\sqrt{2}\sin t\cdot\sin\left(t\sqrt{2}+\mu\right)\right]-\nu\cos t\\ y=\lambda\left[\sin t\cdot\cos\left(t\sqrt{2}+\mu\right)-\sqrt{2}\cos t\cdot\sin\left(t\sqrt{2}+\mu\right)\right]-\nu\sin t\\ z=\lambda\cos\left(t\sqrt{2}+\mu\right)+\nu\end{array}\right.\end{array}}$$

5) a) D'après le système S_g lui-même, (x',y',z') s'annule en 0 si et seulement si y et z s'annulent en 0, soit si et seulement si : $\lambda\sin\mu=0$ et $\lambda\cos\mu+\nu=0$.

Notons que $\lambda=\nu=0$ conduit à la solution nulle...

Par contre, $\lambda=1$, $\mu=0$ et $\nu=-1$ fournit une solution non nulle :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Une solution non nulle est donnée par :}\\ \left\{\begin{array}{l} x_1=\cos t\cdot\left(1+\cos t\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\sin t\cdot\sin t\sqrt{2}\\ y_1=\sin t\cdot\left(1+\cos t\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\cos t\cdot\sin t\sqrt{2}\\ z_1=\cos t\sqrt{2}-1\end{array}\right. .\end{array}}$$

Le théorème de Cauchy m'indique en outre que l'application Φ_0, qui à $\phi=(x,y,z)$ associe $\phi(0)$, est un isomorphisme de l'espace (de dimension 3) des solutions de S_g dans $\mathbb{R}^3$; or nous venons de voir que $\phi'(0)=0$ si et seulement si $y(0)=z(0)=0$. L'ensemble des solutions ϕ telles que $\phi'(0)=0$ est donc une droite vectorielle, en tant qu'image réciproque par l'isomorphisme Φ_0 de la droite vectorielle $\text{Vect}(1,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$. Or (x_1,y_1,z_1) ci-dessus est un vecteur non nul de cette droite vectorielle : il en constitue donc une base.

$$\boxed{\text{Les autres solutions sont les } k\cdot(x_1,y_1,z_1),\ k\in\mathbb{R}.}$$

N.B. Cela peut se prouver directement par le calcul, sans oublier les cas $\mu\equiv 0\ [2\pi]$ et $\mu\equiv\pi\ [2\pi]$...

b) D'après S_g, j'ai : $x_1'=z_1\sin t=\left(\cos\sqrt{2}t-1\right)\sin t=-t^3+O\left(t^5\right)$

et : $y_1'=-z_1\cos t=-\left(\cos\sqrt{2}t-1\right)\cos t=t^2+O\left(t^4\right)$.

Comme les fonctions x_1 et y_1 sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, ces développements limités proviennent de la formule de Taylor-Young et j'ai donc :

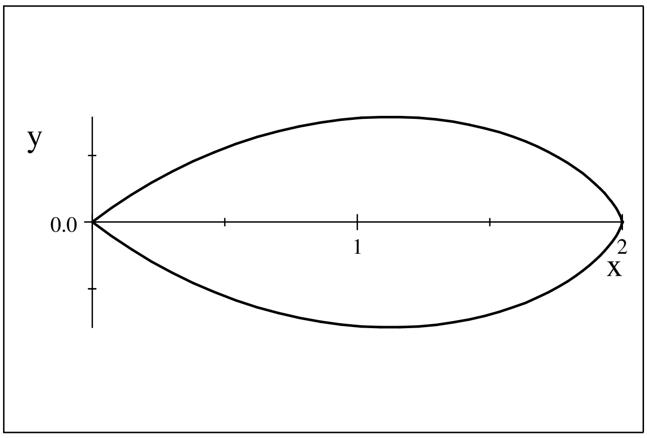
$$\left\{\begin{array}{l} x_1'(0)=x_1''(0)=0\\ y_1'(0)=y_1''(0)=0\end{array}\right. ;\ \left\{\begin{array}{l} x_1^{(3)}(0)=0\\ y_1^{(3)}(0)=2\end{array}\right. ;\ \left\{\begin{array}{l} x_1^{(4)}(0)=-6\\ y_1^{(4)}(0)=0\end{array}\right. .$$

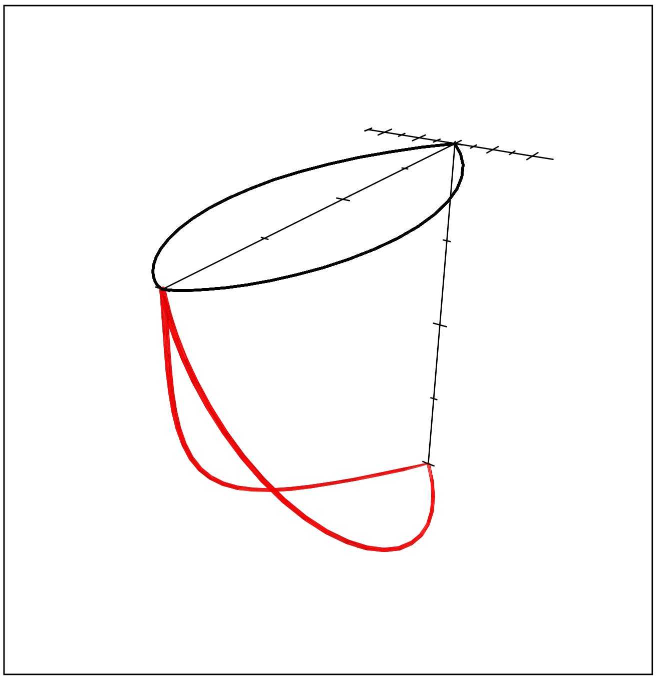
Ainsi, pour $t=0$, j'ai, avec les notations usuelles, $p=3$ (impair) et $q=4$ (pair) : ce point stationnaire est donc un point ordinaire ! Le reste de l'étude est banal.

x_1 étant une fonction paire et y_1 impaire :

$$\boxed{\text{L'arc sur } \left]-\pi/\sqrt{2},\pi/\sqrt{2}\right[\text{ s'obtient en complétant par symétrie par rapport à } Ox \text{ de l'arc sur } \left]0,\pi/\sqrt{2}\right[.}$$

(Voir la figure ci-dessous à gauche.)





c) Il suffit de “relever” la courbe plane précédente en fonction des valeurs de z_1, sachant en outre que la trajectoire est tracée sur la sphère de centre O de rayon 2 (cf. **3)b)**). Un mot tout de même sur le point $(2,0,0)$ de paramètre 0, qui est un point stationnaire : en ce point, j'ai déjà dit que x_1'' et y_1'' sont nuls, mais $z_1''=1$: donc, pour la courbe gauche, $p=2$ et la tangente est parallèle à Oz. La courbe admet pour plan de symétrie le plan xOz (x_1 et z_1 sont paires, y_1 est impaire) : par conséquent le point de paramètre 0 est un point de rebroussement.

Voir la figure page précédente : j'ai représenté dans le plan xOy l'arc précédent, projection de la trajectoire sur ce plan ; la trajectoire elle-même, en rouge, se trouve au-dessous du plan xOy, puisque z est compris entre -2 et 0.

Partie III – Suite récurrente

1) a) Comme je l'ai déjà expliqué au **II-2)c)** :

$$\boxed{\text{Il existe une matrice orthogonale } P \text{ et d'un réel positif } \alpha \text{ tels que } P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&-\alpha&0\\ \alpha&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}.}$$

(Pour obtenir $\alpha>0$, il suffit d'échanger — si besoin — les rôles de e_1 et e_2 tels que ceux construits au **I-5)**.)

b) J'obtiens α en comparant par exemple les polynômes caractéristiques :

$$\chi_A=X\left(X^2+a^2+b^2+c^2\right)\quad\text{et}\quad\chi_{P^{-1}AP}=X\left(X^2+\alpha^2\right)\ ;$$

or deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique ; d'où, par unicité des coefficients, sachant que $\alpha>0$:

$$\boxed{\alpha=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.}$$

c) En multipliant à gauche par P^{-1} et en faisant (habilement) apparaître PP^{-1}, j'obtiens :

$$P^{-1}\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\\ z_{n+1}\end{pmatrix}=\left(P^{-1}AP\right)P^{-1}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\\ z_n\end{pmatrix},$$

d'où les relations de récurrence :

$$\boxed{\begin{cases}p_{n+1}=-\alpha q_n\\ q_{n+1}=\alpha p_n\\ r_{n+1}=0\end{cases}.}$$

2) Écartons tout d'abord le cas banal où $x_0=y_0=0$: dans ce cas, la suite stationne à l'origine.

Dorénavant, le complexe $z_0=x_0+iy_0$ est non nul, je noterai

$$\rho_0=|z_0|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}\quad\text{et}\quad\theta_0=\arg z_0=\begin{cases}2\arctan\dfrac{y_0}{\rho_0+x_0} & \text{si } z_0\notin\mathbb{R}^-\\ \pi & \text{si } z_0\in\mathbb{R}^-\end{cases}.$$

de sorte que $x_0+iy_0=\rho_0e^{i\theta_0}$. Je note, pour tout n, $z_n=x_n+iy_n$; les relations de l'énoncé fournissent alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad z_{n+1}=i\alpha z_n$$

d'où par une récurrence immédiate, du fait que $i=e^{i\pi/2}$:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad z_n=(i\alpha)^n z_0=\rho_0\alpha^n e^{i(\theta_0+n\pi/2)}.$$

J'obtiens ainsi comme module et argument de z_n :

$$\rho_n=\rho_0\alpha^n\quad\text{et}\quad\theta_n=\theta_0+n\frac{\pi}{2}.$$

D'où

$$\rho_n=\rho_0e^{n\ln\alpha}\quad\text{et}\quad\frac{2}{\pi}\ln\alpha\cdot\theta_n=\frac{2}{\pi}\ln\alpha\cdot\theta_0+n\ln\alpha\ .$$

Il en résulte immédiatement que :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } n,\ (x_n,y_n) \text{ est sur la spirale logarithmique d'équation } \rho=ke^{m\theta}, \text{ avec :}\\ k=\rho_0e^{-\frac{2}{\pi}\ln\alpha\cdot\theta_0}\quad\text{et}\quad m=\frac{2}{\pi}\ln\alpha. \text{ L'équation s'écrit : } \rho=\rho_0e^{\frac{2}{\pi}\ln\alpha\cdot(\theta-\theta_0)}.\end{array}}$$

3) En identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, je constate que f n'est autre que l'application $z \mapsto i\alpha z$, à savoir la similitude directe de centre O, de rapport α et d'angle $\pi/2$. Soit $M(\theta)$ d'affixe $\rho e^{i\theta}$ sur la spirale (c'est-à-dire que $\rho = ke^{m\theta}$) ; la valeur de m ci-dessus est telle que

$$ke^{m\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = \alpha \cdot ke^{m\theta} = \alpha\rho$$

autrement dit $f(M)$, d'affixe $\alpha\rho e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$, est encore sur la spirale :

$$\boxed{\text{La spirale est invariante par } f\text{. L'image par } f \text{ de } M(\theta) \text{ est } M(\theta+\pi/2).}$$