D.L. 5

Dans ce problème, on s'intéresse aux systèmes différentiels et aux suites récurrentes associées à une matrice antisymétrique de $\mathbb{R}^3$.
On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.
I_E désigne l'application identité de E.
Le produit scalaire de deux vecteurs X et Y de E est noté $\langle X, Y\rangle$.

Partie I – Endomorphisme antisymétrique

Soit u un endomorphisme non nul de E tel que : $\forall X \in E \quad \langle u(X), X\rangle = 0$.

1) Démontrer que : $\forall (X, Y) \in E \times E \quad \langle u(X), Y\rangle = -\langle X, u(Y)\rangle$.

2) **a)** Démontrer que 0 est la seule valeur propre réelle possible de u.

b) Montrer que le polynôme caractéristique de u a au moins une racine réelle. Qu'en déduit-on pour $\operatorname{Ker} u$?

3) Démontrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

4) Soit X un vecteur non nul de $\operatorname{Im} u$.

a) Démontrer que $\big(X, u(X)\big)$ est une famille libre de $\operatorname{Im} u$.

b) En déduire les dimensions de $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$.

5) Montrer qu'il existe une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) de E et un réel α tels que la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) soit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u^0 = \mathrm{I}_E$ et $u^{n+1} = u \circ u^n$.

a) Démontrer que $u^2 = -\alpha^2 p$ où p est une projection orthogonale à préciser.

b) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u^n en fonction de α, p et u, en distinguant suivant la parité de n.

7) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer que la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{u^k}{k!}$ s'écrit $\mathrm{I}_E + C_N(\alpha)\, p + S_N(\alpha)\, u$ où C_N et S_N sont des polynômes.

b) Trouver les limites de $C_N(\alpha)$ et $S_N(\alpha)$ quand $N \to +\infty$.
On note ces limites $C(\alpha)$ et $S(\alpha)$, respectivement.

c) Caractériser géométriquement l'endomorphisme $\mathrm{I}_E + C(\alpha)\, p + S(\alpha)\, u$, que l'on note $\exp(u)$.

Partie II – Système différentiel

Dans toute cette partie, α est un réel non nul, et x, y, z trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Pour $t \in \mathbb{R}$, soit S le système différentiel : $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = -\alpha y(t) \\ y'(t) = \alpha x(t) \\ z'(t) = 0 \end{array}\right.$.

a) Montrer que S est équivalent à : $\left\{\begin{array}{l} y''(t) + \alpha^2 y(t) = 0 \\ x(t) = y'(t)/\alpha \\ z'(t) = 0 \end{array}\right.$.

b) Résoudre S.

c) Caractériser géométriquement les trajectoires solutions, c'est-à-dire les courbes

$$t \mapsto \overrightarrow{OM\,(t)} = \begin{pmatrix} x\,(t) \\ y\,(t) \\ z\,(t) \end{pmatrix} \quad \text{où } (x,y,z) \text{ est solution de } S.$$

2) Soit S_g le système différentiel : $\begin{cases} x'\,(t) = -ay\,(t) - bz\,(t) \\ y'\,(t) = ax\,(t) - cz\,(t) \\ z'\,(t) = bx\,(t) + cy\,(t) \end{cases}$, où a, b, c sont des réels non tous nuls.

On considère l'endomorphisme u de matrice, dans la base canonique de E,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Démontrer que, pour tout X de E, $\langle u\,(X)\,, X\rangle = 0$.

b) Déterminer le noyau de u et une équation cartésienne de l'image de u.

c) Expliquer, en utilisant les résultats de la partie **I**, comment la résolution de S_g peut se ramener à celle du système S.

d) Caractériser géométriquement les trajectoires solutions de S_g.

3) On reprend le système S_g défini à la question **II-2)**, mais on suppose maintenant que a, b, c sont des fonctions de t, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que (x,y,z) est solution de S_g et, pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M\,(t)$ le point $(x\,(t)\,, y\,(t)\,, z\,(t))$.

a) Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe un vecteur $\overrightarrow{\Omega\,(t)}$ tel que

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\Omega\,(t)} \wedge \overrightarrow{OM\,(t)}.$$

b) Démontrer que la courbe décrite par $M\,(t)$ est tracée sur une sphère de centre O.

4) Dans les deux questions suivantes, on étudie le système S_g dans le cas où :

$$a\,(t) = 0\,, \quad b\,(t) = -\sin t\,, \quad c\,(t) = \cos t.$$

a) Démontrer que, si (x,y,z) est solution de S_g, alors z est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et $z'' + 2z$ est constant.

b) En déduire l'expression de la solution générale (x,y,z) : on exprimera z sous la forme

$$\lambda \cos\,(\omega t + \mu) + \nu$$

où ω est à déterminer et λ, μ, ν sont des constantes arbitraires, puis on en déduira x et y.

5) On cherche, parmi les solutions précédentes, celles qui vérifient :

$$\text{pour } t = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = 0.$$

a) Expliciter une solution non nulle (x_1, y_1, z_1) et montrer que les autres solutions sont proportionnelles à celle-là.

b) Étudier et tracer l'arc $t \mapsto \big(x_1\,(t)\,, y_1\,(t)\big)$ sur $\left]0, \pi/\sqrt{2}\right[$.
Comment obtient-on l'arc sur $\left]-\pi/\sqrt{2}, \pi/\sqrt{2}\right[$?

c) Représenter la trajectoire de $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ lorsque t décrit $\left]-\pi/\sqrt{2}, \pi/\sqrt{2}\right[$.

Partie III – Suite récurrente

1) A désigne toujours la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont des réels non tous nuls et u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de E. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $X_{n+1} = u(X_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Justifier l'existence d'une matrice orthogonale P et d'un réel positif α tels que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Exprimer α en fonction de a, b, c.

c) Notant (x_n, y_n, z_n) les coordonnées de X_n, on pose

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Expliciter les relations de récurrence vérifiées par p_n, q_n, r_n.

2) Soit (x_n, y_n) une suite de points de $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$x_{n+1} = -\alpha y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \alpha x_n\ .$$

Démontrer que ces points sont situés sur une spirale logarithmique d'équation polaire $\rho = ke^{m\theta}$ où l'on explicitera k et m en fonction de α, x_0, y_0 *(c'est-à-dire que les affixes $x_n + iy_n$ peuvent s'écrire $\rho_n e^{i\theta_n}$ où le réel positif ρ_n et le réel θ_n vérifient pour tout n une relation de la forme $\rho_n = ke^{m\theta_n}$, k et m étant deux réels indépendants de n).*

3) Démontrer que cette spirale est invariante par la transformation plane

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\alpha y \\ \alpha x \end{pmatrix}$$

et préciser l'image par f d'un point $M(\theta)$ de la spirale.