Problème A : *transformation de Fourier*

I – Généralités et premiers exemples

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$; justifier la définition de $\widehat{f}(x)$ revient à montrer que la fonction $g_x : t \mapsto e^{-ixt} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Or g_x est continue sur $\mathbb{R}$, comme f, et j'ai :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |g_x(t)| = |f(t)|.$$

Par conséquent, g_x est intégrable sur $\mathbb{R}$, puisque f l'est.

$$\boxed{\widehat{f} \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

b) Supposons f paire et à valeurs réelles. x étant fixé dans $\mathbb{R}$, j'effectue le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = -t$ pour obtenir :

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} f(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{car } f \text{ est paire ;}$$

$\widehat{f}(x)$ est encore égal à la demi-somme de la première et de la troisième des intégrales ci-dessus, soit

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_{\mathbb{R}} \cos(xt) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

J'en déduis en particulier :

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est paire et à valeurs réelles, alors } \widehat{f} \text{ également.}}$$

De même, pour f impaire, j'obtiens

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = -i\int_{\mathbb{R}} \sin(xt) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

J'en déduis en particulier :

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est impaire et à valeurs réelles, alors } \widehat{f} \text{ est impaire à valeurs imaginaires pures.}}$$

2) a) p est clairement continue sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue sur le segment $[-1, 1]$ et nulle en dehors de ce segment :

$$\boxed{p \text{ appartient à } \mathcal{I}.}$$

b) p étant paire, il vient facilement, d'après le résultat vu au **1)b)** :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \widehat{p}(x) = 2\,\mathrm{Re}\left(\int_0^1 e^{ixt}(1-t)\,\mathrm{d}t\right),$$

d'où, après une intégration par parties :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \widehat{p}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2}{x^2}(1 - \cos x) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.}$$

Comme $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, p est continue sur $\mathbb{R}$; de plus, p est paire, elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle l'est sur $\mathbb{R}^+$. Comme p est continue sur $[0, 1]$, il suffit de montrer qu'elle est intégrable sur $[1, +\infty[$, or, d'après l'expression obtenue ci-dessus, j'ai $\widehat{p}(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc par comparaison à une intégrale de Riemann, comme $2 > 1$:

$$\boxed{\widehat{p} \text{ appartient à } \mathcal{I}.}$$

3) a) De même, j'ai E_n continue sur $\mathbb{R}$, paire et $E_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, d'où, grâce au **1)b)** :

$$\boxed{E_n \in \mathcal{I} \text{ et } \widehat{E_n}(x) = 2\,\mathrm{Re}\,K_n.}$$

b) En intégrant par parties avec $u : t \mapsto -\dfrac{e^{-\alpha t}}{\alpha}$ et $v : t \mapsto t^n$, comme le produit uv admet pour limite 0 en 0 et en $+\infty$ et comme K_n converge, j'obtiens : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad K_n = \dfrac{n}{\alpha} K_{n-1}$. Par ailleurs, un simple calcul de primitive montre que $K_0 = \dfrac{1}{\alpha}$, d'où par une récurrence immédiate :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad K_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.}$$

c) D'après **a)** et **b),** j'ai

$$\widehat{E_n}(x) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{n!}{(1-ix)^{n+1}}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{n!}{(1+x^2)^{n+1}}(1+ix)^{n+1}\right)\ ;$$

il en résulte en particulier :

$$\boxed{\widehat{E_0}(x) = \frac{2}{1+x^2}\ ;\ \widehat{E_1}(x) = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}\ ;\ \widehat{E_2}(x) = \frac{4\left(1-3x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.}$$

d) Notons que, comme $1>0$,

$$1+ix = \sqrt{1+x^2}e^{i\arctan x},$$

d'où

$$\boxed{\widehat{E_n}(x) = \frac{2\,(n!)\cos\left[(n+1)\arctan x\right]}{(1+x^2)^{\beta(n)}},\ \text{avec } \beta(n) = \frac{n+1}{2}.}$$

e) D'après l'expression précédente, $\widehat{E_n}$ est paire, continue sur $\mathbb{R}$ et $\widehat{E_n}(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$; cela permet de conclure que $\widehat{E_n}$ est dans $\mathcal{I}$ pour $n \geq 1$ (auquel cas $n+1>1\dots$). Pour la valeur $n=0$, $\widehat{E_0}$ a été explicité au **c)** et appartient aussi à $\mathcal{I}$:

$$\boxed{\widehat{E_n} \text{ appartient à } \mathcal{I} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.}$$

II – Transformée de Fourier de $\mathcal{H}_0$

1) $\mathcal{H}_0$ est paire, continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car $e^{-t^2/2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(1/t^2\right)$). De plus, le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $t = u\sqrt{2}$ donne

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_{\mathbb{R}^+} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Donc, compte tenu de la parité :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_0(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.}$$

2) **a)** Pour les mêmes raisons que $\mathcal{H}_0$ ci-dessus,

$$\boxed{g_n \text{ appartient à } \mathcal{I} \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}.}$$

b) Une intégration par parties avec $u : t \mapsto -e^{-t^2/2}$ et $v : t \mapsto t^{2n+1}$, comme le produit uv admet pour limite 0 en 0 et en $+\infty$ et comme I_{n+1} converge, donne :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\quad I_{n+1} = (2n+1)\,I_n.}$$

D'où, par une récurrence immédiate, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$I_n = (2n-1)(2n-3)\dots 3\cdot 1\cdot I_0 = \frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}I_0.$$

Comme $I_0 = \sqrt{\pi/2}$ (vu au **1)**), j'ai finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\quad \frac{I_n}{(2n)!} = \frac{\sqrt{\pi/2}}{2^n\cdot n!}.}$$

3) La série proposée n'est autre que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{\left(-x^2/2\right)^n}{n!}$: je reconnais la série exponentielle !

$$\boxed{\sum_{n\geq 0}\frac{\left(-x^2/2\right)^n}{n!} \text{ converge et a pour somme } e^{-x^2/2}.}$$

4) La fonction proposée est continue, majorée en valeur absolue par $\mathcal{H}_0$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après le **1),** donc

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto e^{-t^2/2}\cos(xt) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.}$$

5) Fixons x réel. D'après **I-1)b),** $\mathcal{H}_0$ étant paire, j'ai

$$\widehat{\mathcal{H}_0}(x) = 2\int_0^{+\infty} \cos(xt)\, e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(xt)^{2n}}{(2n)!} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Je vais appliquer sur $\mathbb{R}^+$ le théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions $\sum u_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad u_n(t) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} g_n(t).$$

- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$, par construction, sa somme étant la fonction $t \mapsto \cos(xt)\, e^{-t^2/2}$, qui est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Les u_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$, intégrables sur $\mathbb{R}^+$, avec d'après **2)b),**
$$\int_{\mathbb{R}^+} |u_n| = \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
- La série numérique de terme général $\int_{\mathbb{R}^+} |u_n|$ converge (encore une série exponentielle, de somme $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{x^2/2} \dots$).

J'en conclus que la fonction somme est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (résultat déjà prouvé au **3)**...) et — surtout — que

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)\, e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} g_n(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

d'où

$$\boxed{\widehat{\mathcal{H}_0}(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t.}$$

6) D'après **5)** et **2)b),** j'obtiens :

$$\widehat{\mathcal{H}_0}(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} I_n = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-x^2/2},$$

cela pour tout réel x, autrement dit :

$$\boxed{\widehat{\mathcal{H}_0} = \lambda_0.\mathcal{H}_0, \text{ avec } \lambda_0 = \sqrt{2\pi}.}$$

Problème B

Partie I

1) Il est immédiat que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$; de plus, si $f \in \mathcal{B}$, alors $g : t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et

$$g(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{1+t^2}\right).$$

Comme $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, il en résulte que g est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc élément de $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel contenant } \mathcal{B}.}$$

2) γ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et n'est pas bornée, car $\gamma\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$; γ n'appartient pas à $\mathcal{B}$. En revanche,

$$\gamma(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\right) = O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$

Comme $3/2 > 1$, γ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$:

$$\boxed{\gamma \text{ est élément de } \mathcal{E} \text{ mais n'appartient pas à } \mathcal{B}.}$$

3) Soit x fixé dans J ; $x > -1$, donc : $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad 1+t^2+x>0$. Par conséquent, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t^2+x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $1+t^2+x \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2 \underset{t\to+\infty}{\sim} 1+t^2$, d'où

$$\frac{|f(t)|}{1+t^2+x} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{|f(t)|}{1+t^2}.$$

Comme f est élément de $\mathcal{E}$ par hypothèse, j'en déduis que :

$$\boxed{t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2+x} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+.}$$

4) D'après la question précédente, pour $f \in \mathcal{E}$, $T[f]$ est bien élément de $\mathcal{F}$; de plus T est clairement linéaire d'après la linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{T \text{ est une application linéaire de } \mathcal{E} \text{ dans } \mathcal{F}.}$$

Partie II

1) Je note u la fonction $(x,t) \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t^2+x}$. Soit $a > -1$;

- pour tout x de $[a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (cf. partie **I**)
- pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $x \mapsto u(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ avec $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{f(t)}{(1+t^2+x)^2}$
- pour tout x de $[a,+\infty[$, $t \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times \mathbb{R}^+ \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \le \varphi_1(t) \quad \text{où} \quad \varphi_1 : t \mapsto \frac{|f(t)|}{(1+t^2+a)^2} \;;$$

  φ_1 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ($\varphi_1(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{f(t)}{1+t^2}\right)$).

Ainsi, je peux appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$. $T[f]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par la formule de Leibniz. Comme cela vaut pour tout $a > -1$, j'en conclus que :

$$\boxed{T[f] \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } J \text{ et sa dérivée est donnée par (1).}}$$

2) a) Le raisonnement du **1)** s'applique par récurrence pour toutes les dérivées de $T[f]$, car, pour $p \ge 2$, l'hypothèse de domination pour $T[f]^{(p)}$ est vérifiée avec $\varphi_p : t \mapsto \dfrac{p!\,|f(t)|}{(1+t^2+a)^{p+1}}$, qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car négligeable devant φ_1 au voisinage de $+\infty$). Par conséquent,

$$\boxed{T[f] \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } J \text{ et : } \forall x \in J \quad T[f]^{(p)}(x) = (-1)^p\, p!\, F_p(x).}$$

b) Pour $x = 0$, le résultat précédent s'écrit

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad T[f]^{(p)}(0) = (-1)^p\, p!\, I_p.}$$

3) a) Comme pour tout t dans $\mathbb{R}^+$, $1+t^2 \ge 1$, j'ai : $\forall p \in \mathbb{N} \; \left(1+t^2\right)^{p+1} \ge 1+t^2$, d'où immédiatement

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \frac{|f(t)|}{(1+t^2)^{p+1}} \le \frac{|f(t)|}{1+t^2}.$$

J'ai déjà vu que ces deux fonctions sont intégrables ; j'en déduis

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|f(t)|}{(1+t^2)^{p+1}}\mathrm{d}t \le \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|f(t)|}{1+t^2}\mathrm{d}t.}$$

b) La majoration fournie par le **a)** semble suggérer l'utilisation du théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions. Posons précisément, pour x fixé dans $]-1,1[$:

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad u_p(t) = (-1)^p \frac{x^p f(t)}{(1+t^2)^{p+1}}.$$

∗ La série de fonctions $\sum u_p$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$, avec

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \sum_{p=0}^{\infty} u_p(t) = \frac{f(t)}{1+t^2} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{-x}{1+t^2} \right)^p = \frac{f(t)}{1+t^2} \frac{1}{1+\frac{x}{1+t^2}} = \frac{f(t)}{1+t^2+x} \ ;$$

la fonction somme est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

∗ Les u_p sont continues, intégrables sur $\mathbb{R}^+$ d'après ce qui précède, avec :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \int_{\mathbb{R}^+} |u_p| = I_p \, |x|^p \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^+} u_p = (-1)^p \, I_p x^p.$$

∗ D'après **a)**, la suite (I_p) est bornée ; donc, puisque $|x| < 1$, la série numérique $\sum \int_{\mathbb{R}^+} |u_p|$ converge.

Je peux donc conclure, grâce au théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions, que cette fonction somme est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (déjà vu !) et que

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(t)}{1+t^2+x} \mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^+} u_p, \ \text{autrement dit :}$$

$$\boxed{T[f](x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \, I_p x^p, \text{ cela pour tout réel } x \text{ de l'intervalle }]-1,1[.}$$

c) D'après **2)a)**, $\overline{T}$ est bien définie, mais il est clair qu'elle ne peut être surjective : le résultat précédent montre en effet que toute fonction de $\operatorname{Im} \overline{T}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, alors que ce n'est pas le cas de toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J. En conclusion :

$$\boxed{\overline{T} \text{ n'est pas surjective.}}$$

N.B. Un autre argument, plus terre à terre et visible dès la définition de $T[f]$, est que toute fonction de $\operatorname{Im} \overline{T}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$...

Partie III

1) a) J'ai immédiatement, sachant que f appartient à $\mathcal{E}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |\Phi(t)| \leq \int_0^t \frac{|f(u)|}{1+u^2} \mathrm{d}u \leq \int_0^{+\infty} \frac{|f(u)|}{1+u^2} \mathrm{d}u.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\Phi \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+.}$$

b) Je dispose donc de $M > 0$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |\Phi(t)| \leq M$. Alors, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \left| \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}} \right| \leq M \frac{t}{(1+t^2)^{k+1}} \underset{t \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{2k+1}} \right).$$

Or $2k+1 > 1$; comme la fonction considérée est continue sur $\mathbb{R}^+$, il en résulte que

$$\boxed{t \mapsto \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+.}$$

Φ étant une primitive de $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t^2}$ et comme $\dfrac{t}{(1+t^2)^{k+1}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\dfrac{-1}{2k(1+t^2)^k} \right)$, j'obtiens en intégrant par parties, pour $X > 0$:

$$\int_0^X \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}} \mathrm{d}t = \left[\frac{-\Phi(t)}{2k(1+t^2)^k} \right]_0^X + \int_0^X \frac{f(t)}{2k(1+t^2)^{k+1}} \mathrm{d}t.$$

Comme $\Phi(0) = 0$ et comme Φ est bornée, j'en déduis en faisant tendre X vers $+\infty$:

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}} \mathrm{d}t = \frac{I_k}{2k}.}$$

2) $T[f]$ étant la fonction nulle par hypothèse, toutes ses dérivées sont également nulles, notamment en 0. Autrement dit, d'après le **II)2)b)**, j'ai :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad I_k = 0.}$$

3) a) D'après les théorèmes opératoires classiques, φ est continue sur $]0,1]$; $\lim_{u\to 0}\sqrt{\frac{1-u}{u}}=+\infty$ et $\lim_{t\to+\infty}\Phi(t)=T[f](0)=0$ par hypothèse.

Donc, par composition de limites, $\lim_{u\to 0}\varphi(u)=0=\varphi(0)$. φ est également continue en 0.

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } [0,1].}$$

J'effectue sur $]0,1]$, le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif

$$t=\sqrt{\frac{1-u}{u}}\ ,\ \text{soit } u=\frac{1}{1+t^2}\ ;\ \mathrm{d}u=\frac{-2t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t.$$

J'obtiens, pour $k\in\mathbb{N}$,

$$\int_0^1 u^k\varphi(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{2t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+2}}\mathrm{d}t=\frac{I_{k+1}}{k+1}=0\quad(\text{cf. } \mathbf{1)b)} \text{ et } \mathbf{2)}).$$

Finalement,

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}\quad \int_{\mathbb{R}^+}u^k\varphi(u)\,\mathrm{d}u=0.}$$

b) (5) et la linéarité de l'intégrale montrent que $\int_0^1 P\varphi=0$ pour tout polynôme P. φ étant continue, le théorème de Weierstrass me fournit une suite (P_n) de polynômes convergeant uniformément vers φ sur $[0,1]$; comme φ est bornée (car continue sur un segment), la suite $(P_n\varphi)$ converge uniformément vers φ^2 sur $[0,1]$ (en effet $N_\infty\left(P_n\varphi-\varphi^2\right)\leq N_\infty(\varphi)\,N_\infty(P_n-\varphi)$).

J'en déduis que la suite des intégrales $\left(\int_0^1 P_n\varphi\right)$ converge vers $\int_0^1\varphi^2$; or cette suite est la suite nulle d'après **a)**, donc, par unicité de la limite : $\int_0^1\varphi^2=0$. Comme φ^2 est positive, continue, elle est nulle sur $[0,1]$, d'où

$$\boxed{\forall u\in[0,1]\quad \varphi(u)=0.}$$

4) La question précédente montre que, si f appartient à $\operatorname{Ker}T$, la fonction Φ associée comme ci-dessus est nulle sur $\mathbb{R}^+$; il en résulte que sa dérivée est nulle également sur $\mathbb{R}^+$ et par conséquent $f=0$.

$$\boxed{T \text{ est injective.}}$$

Problème C – *Polynômes d'Hermite*

Première partie

1) Soit P un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}$ (le cas $P=0$ est trivial), de terme dominant a_nX^n ; P est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et, au voisinage de $\pm\infty$, $[P(t)]^2$ est équivalent à $a_n^2t^{2n}$; or :

$$\lim_{t\to\pm\infty}t^2\cdot a_n^2t^{2n}e^{-t^2}=0,$$

donc, par comparaison avec une intégrale de Riemann, $t\mapsto[P(t)]^2e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{E \text{ contient les fonctions polynomiales.}}$$

2) Je montre que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: E en est une partie par définition, non vide car la fonction nulle est dans E ; il est clair que E est stable par la multiplication externe par un réel ; reste à prouver la stabilité pour l'addition : soient donc f et g dans E :

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad [f(t)+g(t)]^2=[f(t)]^2+[g(t)]^2+2f(t)g(t)\leq 2\left([f(t)]^2+[g(t)]^2\right).$$

Il en résulte que $t\mapsto[(f+g)(t)]^2e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, puisque $t\mapsto[f(t)]^2e^{-t^2}$ et $t\mapsto[g(t)]^2e^{-t^2}$ le sont par hypothèse. En conclusion :

$$\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

Pour $(f,g)\in E^2$, la majoration :

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad |f(t)g(t)|\leq\frac{1}{2}\left([f(t)]^2+[g(t)]^2\right)$$

prouve que $t \mapsto f(t)\,g(t)\,e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$: $(f|g)$ est bien défini. Il est clair que $(\cdot|\cdot)$ est bilinéaire symétrique, positive et, si $f \in E$ vérifie $(f|f) = 0$, alors, $t \mapsto [f(t)]^2\,e^{-t^2}$ étant positive et continue, elle est nulle sur $\mathbb{R}$, d'où $f = 0$ puisque e^{-t^2} ne s'annule pas ; en résumé :

$$\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

Deuxième partie

1) $\phi_n(1) = 2n$, $\phi_n(X) = 2(n-1)X$ et pour $k \geq 2$:

$$\phi_n(X^k) = k(k-1)X^{k-2} + 2(n-k)X^k. \text{ Donc :}$$

$$\boxed{\phi_n(X^k) \text{ est de degré : } k \text{ si } n \neq k,\ k-2 \text{ si } n = k \geq 2 \text{ et } -\infty \text{ si } n = k < 2.}$$

J'en déduis, par combinaisons linéaires, que pour P polynôme de degré $k \neq n$, $\phi_n(P)$ est encore de degré k ; donc un polynôme non nul de $\operatorname{Ker}\phi_n$ est nécessairement de degré n. Pour $n = 0$, réciproquement, tout polynôme constant est dans $\operatorname{Ker}\phi_0$: $\operatorname{Ker}\phi_0$ est la droite des polynômes constants, qui est bien engendrée par un polynôme de degré 0. Pour $n \geq 1$, $\phi_n(\mathbb{R}_n[X])$ est contenu dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et plus précisément égal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (car contenant $\big(\phi_n(1), \ldots, \phi_n(X^{n-1})\big)$ qui en est une base, en tant que famille de n polynômes de degrés échelonnés $0, \ldots, n-1$, donc libre) ; ϕ_n induit donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de rang n : d'après le théorème du rang, son noyau est une droite vectorielle, qui coïncide avec $\operatorname{Ker}\phi_n$ et est engendrée par un polynôme de degré n, puisqu'un polynôme non nul de $\operatorname{Ker}\phi_n$ est nécessairement de degré n, comme je l'ai déjà signalé :

$$\boxed{\operatorname{Ker}\phi_n \text{ est une droite vectorielle engendré par un polynôme de degré } n.}$$

H_n est de la forme $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n = 2^n$ et $\phi_n(H_n) = 0$, donc :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k X^{k-2} + 2\sum_{k=0}^{n}(n-k)a_k X^k = 0,$$

soit, en réindexant : $\sum\limits_{k=0}^{n-2}(k+1)(k+2)a_{k+2}X^k + 2\sum\limits_{k=0}^{n}(n-k)a_k X^k = 0,$

d'où : $a_{n-1} = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{0, \ldots, n-2\} \quad a_k = -\dfrac{(k+1)(k+2)}{2(n-k)}a_{k+2}.$

J'en déduis par récurrence, compte tenu de $a_n = 2^n$:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour } p \text{ tel que } 0 \leq 2p+1 \leq n,\ a_{n-2p-1} = 0 \text{ et} \\ \text{pour } p \text{ tel que } 0 \leq 2p \leq n,\ a_{n-2p} = (-1)^p \dfrac{2^{n-2p}n!}{p!(n-2p)!}\end{array}}$$

Ce résultat permet d'obtenir :

$$\boxed{H_0 = 1,\ H_1 = 2X,\ H_2 = 4X^2 - 2,\ H_3 = 8X^3 - 12X.}$$

Enfin la nullité des coefficients de la forme a_{n-2p-1} signifie que :

$$\boxed{H_n \text{ est de la même parité que } n.}$$

2) Je remarque que : $\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi'(t) + 2t\psi(t) = 0$ et la formule de Leibniz donne, en dérivant $n+1$ fois :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \psi^{(n+2)}(t) + 2t\psi^{(n+1)}(t) + 2(n+1)\psi^{(n)}(t) = 0.}$$

3) Une récurrence facile montre que $\psi^{(n)}(t)$ est le produit de e^{-t^2} par un polynôme de terme dominant $(-2)^n X^n$. En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y_n'(t) = e^{t^2}\left[\psi^{(n+1)}(t) + 2t\psi^{(n)}(t)\right]$$
$$y_n''(t) = e^{t^2}\left[\psi^{(n+2)}(t) + 4t\psi^{(n+1)}(t) + 2\psi^{(n)}(t) + 4t^2\psi^{(n)}(t)\right]$$

d'où : $\phi_n(y_n)(t) = e^{t^2}\left[\psi^{(n+2)}(t) + 2t\psi^{(n+1)}(t) + (2n+2)\psi^{(n)}(t)\right] = 0$

d'après la question précédente. En conclusion :

$$\boxed{y_n \text{ est un polynôme de } \operatorname{Ker}\phi_n.}$$

H_n étant l'unique polynôme de la droite $\operatorname{Ker}\phi_n$ de coefficient dominant 2^n, j'en déduis :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad H_n(t) = (-1)^n y_n(t) = (-1)^n e^{t^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(e^{-t^2}\right).}$$

4) En multipliant la relation du **2)** par e^{t^2}, j'obtiens :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y_{n+2}(t) + 2ty_{n+1}(t) + 2(n+1)y_n(t) = 0,$$

autrement dit, d'après la question précédente, en simplifiant par $(-1)^n$:

$$\boxed{H_{n+2} - 2XH_{n+1} + 2(n+1)H_n = 0.}$$

5) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}[X]$; j'intègre par parties, sachant que tous les produits d'un polynôme par $t \mapsto e^{-t^2}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et admettent une limite nulle en $\pm\infty$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)P(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(e^{-t^2}\right)P(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[(-1)^n \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(e^{-t^2}\right)P(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(e^{-t^2}\right)P'(t)\mathrm{d}t \\ &= 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} H_{n-1}(t)e^{-t^2}P'(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } P \in \mathbb{R}[X],\ (H_n|P) = (H_{n-1}|P').}$$

6) En itérant le résultat précédent, je trouve, pour $p \leq n$: $(H_n|X^p) = (H_{n-p}|p!) = p!(H_{n-p}|1)$.

Pour $p < n$, j'applique une fois de plus le résultat précédent : $(H_{n-p}|1) = (H_{n-p-1}|0) = 0$.

Pour $p = n$, $(H_0|1) = I_0 = \sqrt{\pi}$. En résumé :

$$\boxed{\text{Pour } p < n,\ (H_n|X^p) = 0 \text{ et } (H_n|X^n) = n!\sqrt{\pi}.}$$

H_p étant de degré p, le résultat précédent prouve que, pour $p < n$, $(H_n|H_p) = 0$ et, H_n ayant 2^n pour coefficient dominant, $(H_n|H_n) = 2^n(H_n|X^n)$, soit finalement :

$$\boxed{\text{La famille } (H_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est orthogonale et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \|H_n\|^2 = 2^n n!\sqrt{\pi}.}$$

Troisième partie

La projection orthogonale de f sur $F = \mathrm{Vect}(H_0, \ldots, H_n)$ est :

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k(f)H_k \quad \text{où} \quad \beta_k(f) = \frac{(H_k|f)}{\|H_k\|^2}$$

et $f - g_n$ est orthogonal à F, donc à $g_n - f_n$, d'où grâce au théorème de Pythagore :

$$\|f - f_n\|^2 = \|f - g_n + g_n - f_n\|^2 = \|f - g_n\|^2 + \|g_n - f_n\|^2.$$

De même, $f - g_n$ est orthogonal à g_n, donc :

$$\|f - g_n\|^2 = (f - g_n|f - g_n) = (f - g_n|f) = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \beta_k(f)(H_k|f) = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} [\alpha_k(f)]^2.$$

Enfin, la famille $(H_0, \ldots, H_n)$ étant orthogonale :

$$\|g_n - f_n\|^2 = \sum_{k=0}^{n} [\beta_k(f) - x_k]^2 \|H_k\|^2.$$

Il en résulte que :

$$\boxed{\|f - f_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} [\alpha_k(f)]^2 + \sum_{k=0}^{n} [\beta_k(f) - x_k]^2 \|H_k\|^2 \text{ est minimum lorsque } \forall k \leq n \quad x_k = \beta_k(f).}$$

Pour ce choix des x_k, j'ai :

$$\sum_{k=0}^{n} [\alpha_k(f)]^2 = \|f\|^2 - \|f - f_n\|^2.$$

En particulier :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} [\alpha_k(f)]^2 \leq \|f\|^2.}$$

La série de terme général $[\alpha_k(f)]^2$ est à termes positifs et je viens de voir que ses sommes partielles sont majorées :

$$\boxed{\text{La série de terme général } [\alpha_k(f)]^2 \text{ est convergente.}}$$