D.L. 4

Problème A : *transformation de Fourier*

Notations

On désigne par $\mathcal{A}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, par $\mathcal{I}$ le sous-espace des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ existe, $|f(t)|$ désignant le module de $f(t)$). On considère l'application linéaire $\mathcal{F}$ de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{A}$ définie par :

$$f \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \widehat{f} \quad \text{où} \quad \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

La fonction $\widehat{f}$ est appelée *transformée de Fourier* de la fonction f.

I – Généralités et premiers exemples

1) Dans cette question, f désigne une fonction appartenant à $\mathcal{I}$.

a) Justifier la définition de la fonction $\widehat{f}$.

b) On suppose que la fonction f est à valeurs réelles. Montrer que si f est une fonction paire, alors $\widehat{f}$ est une fonction paire et à valeurs réelles. Que peut-on dire de $\widehat{f}$ si la fonction f est impaire ?

2) Premier exemple : on considère la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(t) = \begin{cases} 1-t & \text{lorsque } t \in [0,1] \\ 0 & \text{lorsque } t \in \,]1,+\infty[\\ p(-t) & \text{lorsque } t \in \,]-\infty, 0[\end{cases}$.

a) Montrer que p appartient à $\mathcal{I}$.

b) Expliciter $\widehat{p}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\widehat{p}$ appartient-elle à $\mathcal{I}$?

3) Deuxième exemple : pour tout entier naturel n, on considère la fonction E_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$E_n(t) = |t|^n e^{-|t|} \quad \text{où } |t| \text{ désigne la valeur absolue de } t.$$

On se propose de déterminer la transformée de Fourier $\widehat{E_n}$ de cette fonction.

Pour cela, on fixe x dans $\mathbb{R}$, on désigne par α le nombre complexe $1 - ix$ et l'on pose

$$K_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t}\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que E_n appartient à $\mathcal{I}$ et exprimer $\widehat{E_n}(x)$ à l'aide de la partie réelle de K_n.

b) Exprimer K_n en fonction de n et α.

c) Expliciter $\widehat{E_0}(x)$, $\widehat{E_1}(x)$, $\widehat{E_2}(x)$.

d) Montrer qu'il existe une fonction β, définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs réelles, que l'on explicitera, telle que

$$\widehat{E_n}(x) = \frac{2(n!)\cos\left[(n+1)\arctan x\right]}{(1+x^2)^{\beta(n)}}.$$

e) La fonction $\widehat{E_n}$ appartient-elle à $\mathcal{I}$?

II – Transformée de Fourier de $\mathcal{H}_0$

Dans cette partie, on désigne par $\mathcal{H}_0$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathcal{H}_0(t) = e^{-t^2/2}$ et l'on se propose de déterminer la transformée de Fourier de $\mathcal{H}_0$. Pour cela, on fixe x dans $\mathbb{R}$.

1) On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

En déduire que $\mathcal{H}_0$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_0(t)\,\mathrm{d}t$.

2) On définit sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions (g_n) par :

$$g_n(t) = t^{2n} e^{-t^2/2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, la fonction g_n appartient à $\mathcal{I}$.

b) On considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. En déduire une expression simple de $\dfrac{I_n}{(2n)!}$.

3) Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}$ et préciser la valeur de sa somme.

4) Vérifier que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto e^{-t^2/2}\cos(xt)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

5) Justifier avec soin l'égalité :

$$\widehat{\mathcal{H}_0}(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

(On rappelle que : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos\theta = \operatorname{Re} e^{i\theta} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$.)

6) Déduire de ce qui précède l'existence d'un nombre réel λ_0, que l'on explicitera, tel que $\widehat{\mathcal{H}_0} = \lambda_0 \mathcal{H}_0$.

Problème B

__**Notations**__ : on désigne respectivement par J l'intervalle $]-1, +\infty[$, $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de J dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ l'ensemble des applications continues et bornées sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, à valeurs réelles et $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications f continues sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs réelles et telles que la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t^2}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

__**Objet du problème**__
Dans la partie **I**, on définit une application linéaire $T : f \mapsto T[f]$ sur $\mathcal{E}$.
Dans la partie **II**, on étudie certaines propriétés des fonctions $T[f]$, liées à la dérivation.
Dans la partie **III**, on étudie l'injectivité de T.

Partie I

1) Prouver que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel contenant $\mathcal{B}$.

2) Vérifier que la fonction $\gamma : t \mapsto \sqrt{t}\sin t$ est élément de $\mathcal{E}$, mais n'appartient pas à $\mathcal{B}$.
On retiendra donc pour la suite du problème qu'un élément de $\mathcal{E}$ n'est pas forcément de signe constant, ni borné sur $\mathbb{R}^+$.

3) Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que, pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t^2+x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Dans toute la suite, pour $f \in \mathcal{E}$, on note $T[f]$ la fonction à valeurs réelles définie sur J par

$$\forall x \in J \quad T[f](x) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(t)}{1+t^2+x}\mathrm{d}t.$$

4) Montrer que $T : f \mapsto T[f]$ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

Partie II

Dans cette partie, f désigne un élément fixé de $\mathcal{E}$.

1) Prouver que la fonction $T[f]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et que

$$\forall x \in J \quad (T[f])'(x) = -\int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^2}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

2) a) Prouver plus généralement que $T[f]$ est dérivable à tout ordre p sur J et exprimer $(T[f])^{(p)}(x)$ à l'aide de l'intégrale suivante :

$$F_p(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^{p+1}}\mathrm{d}t.$$

b) Qu'obtient-on pour $x = 0$?

Dans la suite, on note, pour $p \in \mathbb{N}$, $I_p = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(t)}{(1+t^2)^{p+1}}\mathrm{d}t$.

3) a) Vérifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{|f(t)|}{(1+t^2)^{p+1}}\mathrm{d}t \leq \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|f(t)|}{1+t^2}\mathrm{d}t. \tag{2}$$

b) Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle $]-1,1[$, on a :

$$T[f](x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p I_p\, x^p. \tag{3}$$

c) On désigne par $\mathcal{C}^\infty(J,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J, à valeurs réelles.
L'application $\overline{T} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \to & \mathcal{C}^\infty(J,\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & T[f] \end{array}$ est-elle surjective ?

Partie III

1) Soit f un élément de $\mathcal{E}$. On définit une fonction Φ sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \Phi(t) = \int_0^t \frac{f(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u.$$

a) Vérifier que la fonction Φ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}}\mathrm{d}t = \frac{I_k}{2k} \tag{4}$$

(où I_k a été défini dans la partie **II** après la question **II.2)**).

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $f \in \operatorname{Ker} T$, c'est-à-dire que $f \in \mathcal{E}$ et $T[f]$ est la fonction nulle sur J.

2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $I_k = 0$.

3) On considère la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(u) = \Phi\left(\sqrt{\dfrac{1-u}{u}}\right)$ si $u \in]0,1]$.

a) Montrer que φ est continue sur $[0,1]$ et que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 u^k \varphi(u)\,\mathrm{d}u = 0. \tag{5}$$

b) En déduire que $\forall u \in [0,1] \quad \varphi(u) = 0$ *(on pourra utiliser le théorème de Weierstrass : il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers φ sur $[0,1]$).*
L'application T est-elle injective ?

Problème C : *polynômes d'Hermite*

On désigne par E l'ensemble des applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que la fonction $t \mapsto [f(t)]^2 e^{-t^2}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. On admettra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Première partie

1) Montrer que E contient les fonctions polynomiales.

2) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\forall (f,g) \in E^2 \quad (f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

On notera $\|\cdot\|$ la norme associée.

Deuxième partie

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme P associe $P''-2XP'+2nP$. Déterminer le degré de $\phi_n(X^k)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et en déduire que le noyau de ϕ_n est une droite vectorielle de $\mathbb{R}[X]$, engendrée par un polynôme de degré n.

On désigne par H_n celui des polynômes de $\operatorname{Ker}\phi_n$ dont le terme dominant est $2^n X^n$.

Calculer les coefficients de H_n ; préciser en particulier H_0, H_1, H_2, H_3 et montrer que H_n est de la même parité que n.

2) On définit l'application ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant : $\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi(t) = e^{-t^2}$.
Établir une relation linéaire entre les dérivées d'ordre $n+2, n+1$ et n de ψ.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, vérifier que la fonction $y_n : t \mapsto e^{t^2}\psi^{(n)}(t)$ est polynomiale et appartient à $\operatorname{Ker}\phi_n$.
En déduire que les polynômes H_n définis dans le **1)** sont donnés par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(e^{-t^2}\right).$$

4) Montrer que H_n, H_{n+1} et H_{n+2} sont liés par une relation linéaire que l'on déterminera.

5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, établir : $(H_n|P) = (H_{n-1}|P')$.

6) Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, tel que $p \leq n$, calculer $(H_n|X^p)$.
En déduire que la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. Préciser la valeur de $\|H_n\|^2$.

Troisième partie

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$, on pose $\xi_n(f) = (H_n|f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)f(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $\alpha_n(f) = \dfrac{\xi_n(f)}{\|H_n\|}$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$ fixés. Pour $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ on pose : $f_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k H_k$.

Calculer $\|f_n - f\|^2$ et montrer que cette quantité admet un minimum pour une famille $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ que l'on précisera. Établir l'inégalité :

$$\sum_{k=0}^{n} [\alpha_k(f)]^2 \leq \|f\|^2$$

et conclure quant à la convergence de la série de terme général $[\alpha_k(f)]^2$.