Problème A

Partie I

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ un système de valeurs propres de A. Nous sommes sur $\mathbb{C}$, A est donc trigonalisable, fixons $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ semblable à A, de diagonale $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est semblable à T^k. Or, par une récurrence immédiate sur k, les éléments diagonaux de T^k sont $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ et donc

$$\rho\left(A^k\right) = \rho\left(T^k\right) = \max_{1\le i\le n}\left|\lambda_i^k\right| = \max_{1\le i\le n}|\lambda_i|^k = \left(\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|\right)^k = [\rho(A)]^k.$$

En conclusion,

$$\boxed{\rho\left(A^k\right) = [\rho(A)]^k.}$$

2) L'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui est de dimension finie, c'est donc une application continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par conséquent, si une suite (A_k) converge vers A, alors la suite image $\left(P^{-1}A_kP\right)$ converge vers l'image de la limite, à savoir $P^{-1}AP$. La réciproque se montre de même, en utilisant la continuité de la bijection réciproque de l'endomorphisme précédent, $N \mapsto PNP^{-1}$.

$$\boxed{(A_k) \text{ converge vers } A \text{ si et seulement si } \left(P^{-1}A_kP\right) \text{ converge vers } P^{-1}AP.}$$

3) a) $T = \lambda.I_2 + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui vérifie $N^2 = 0$. Comme λI_2 et N commutent, la formule du binôme donne $T^k = \lambda^k I_2 + k\lambda^{k-1}N$, soit

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad T^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1}\mu \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}.}$$

- $*$ Si $|\lambda| < 1$, il est clair que $\left(T^k\right)$ converge vers 0 (toutes les suites coordonnées convergent vers 0, car $k|\lambda|^{k-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, du fait des croissances comparées des puissances et exponentielles).
- $*$ Si $|\lambda| > 1$, il est clair que $\left(T^k\right)$ diverge, car elle n'est pas bornée.
- $*$ Reste le cas $|\lambda| = 1$. *Analyse* : supposons que $\left(T^k\right)$ converge. Alors en particulier $\left(\lambda^k\right)$ converge, soit ℓ sa limite. Par continuité du module (application 1-lipschitzienne), $|\ell| = 1$. Mais la suite $\left(\lambda^{k+1}\right)$ converge, d'une part vers ℓ (en tant que suite extraite), d'autre part vers $\lambda \cdot \ell$ (puisque $\lambda^{k+1} = \lambda \cdot \lambda^k$ et par linéarité de la limite). Donc, par unicité de la limite, $\lambda \cdot \ell = \ell$, d'où nécessairement $\lambda = 1$ (ℓ est non nul car de module 1). T^k est donc de la forme $\begin{pmatrix} 1 & k\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et doit être bornée, ainsi nécessairement $\mu = 0$.
  Synthèse : si $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, alors $T = I_2$ et $\left(T^k\right)$ converge vers I_2.

En conclusion,

$$\boxed{\left(T^k\right) \text{ converge si et seulement si } (|\lambda| < 1) \quad \text{ou} \quad (\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \mu = 0).}$$

b) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonalisable et $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ semblable à A. On a vu au **4)** que $\left(A^k\right)$ converge si et seulement si $\left(D^k\right)$ converge, soit si et seulement si les deux suites $\left(\lambda^k\right)$ et $\left(\mu^k\right)$ convergent. Autrement dit, d'après le résultat précédent,

$$\boxed{\left(A^k\right) \text{ converge ssi chaque valeur propre est, soit égale à 1, soit de module strictement inférieur à 1.}}$$

c) Si A est non diagonalisable, elle est trigonalisable et semblable à une matrice T de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$ (en effet, si A admettait deux valeurs propres distinctes, elle serait diagonalisable et, si μ était nul, elle serait aussi diagonalisable !). Alors, d'après les résultats précédents, $\left(A^k\right)$ converge si et seulement si $\left(T^k\right)$ converge, et cela si et seulement si $|\lambda| < 1$ (puisqu'ici $\mu \neq 0$). Ainsi

$$\boxed{\left(A^k\right) \text{ converge si et seulement si } \rho(A) < 1, \text{ auquel cas } \left(A^k\right) \text{ converge vers } 0_2.}$$

d) J'ai vu au **b)** que, dans le cas diagonalisable, $\left(A^k\right)$ converge vers 0_2 si et seulement si ses deux valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1. Finalement

$$\boxed{\left(A^k\right) \text{ converge vers } 0_2 \text{ si et seulement si } \rho(A) < 1.}$$

Partie II

1) a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{E} = \left\{\frac{N(AX)}{N(X)},\ X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right\}$. Notons que $\mathcal{E} = \{N(Au),\ u \in S\}$ où S est la sphère unité de $\mathbb{C}^n$. Or S est une partie non vide, bornée et fermée de $\mathbb{C}^n$ (image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application N continue sur $\mathbb{C}^n$). Comme $u \mapsto Au$ est continue (linéaire en dimension finie) et comme N est continue, il en résulte par composition que $f : u \mapsto N(Au)$ est continue et donc f est bornée et atteint ses bornes sur S. Cela justifie la définition de $\widetilde{N}(A) = \max \mathcal{E}$.
$\widetilde{N}$ est bien une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}^+$.

* Si $\widetilde{N}(A) = 0$, alors $N(Au)$ est nulle, donc Au est nul pour tout vecteur unitaire u ; il en résulte que $A = 0$ (tout vecteur non nul est colinéaire à un vecteur unitaire !).
* L'homogénéité de $\widetilde{N}$ découle immédiatement de celle de N.
* Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $u \in S$; j'utilise l'inégalité triangulaire pour N :
$$N\big((A+B)u\big) \leq N(Au) + N(Bu) \leq \widetilde{N}(A) + \widetilde{N}(B),$$
cela pour tout u de S, en particulier $\widetilde{N}(A+B) \leq \widetilde{N}(A) + \widetilde{N}(B)$.

En conclusion
$$\boxed{\widetilde{N} \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

b) Par définition, $\widetilde{N}(A)$ est un majorant de $\left\{\frac{N(AX)}{N(X)},\ X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right\}$, d'où :
$$\forall X \in \mathbb{C}^n \quad N(AX) \leq \widetilde{N}(A) \cdot N(X) \quad \text{(banal pour } X = 0 \text{ !).}$$
Si je considère A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X non nul dans $\mathbb{C}^n$, j'ai donc
$$N(ABX) = N\big(A(BX)\big) \leq \widetilde{N}(A)\, N(BX) \leq \widetilde{N}(A)\, \widetilde{N}(B)\, N(X),$$
d'où il découle par définition de la borne supérieure que $\widetilde{N}(AB) \leq \widetilde{N}(A)\, \widetilde{N}(B)$. En conclusion,
$$\boxed{\widetilde{N} \text{ est une norme matricielle sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

c) $\rho(A)$ étant un plus grand élément, je peux fixer $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = \rho(A)$ et un vecteur propre X de A associé à λ. J'ai
$$AX = \lambda X \quad \text{donc} \quad N(AX) = |\lambda|\, N(X) \quad \text{soit} \quad \frac{N(AX)}{N(X)} = \rho(A) \quad (X \neq 0 \text{ par hypothèse}) ;$$
il en résulte, par définition de $\widetilde{N}(A)$,
$$\boxed{\rho(A) \leq \widetilde{N}(A).}$$

d) Donc, si $\left(A^k\right)$ converge vers 0, alors $\left(\rho\left(A^k\right)\right)$ également, d'où d'après **I-1)** $\left(\rho(A)^k\right)$ converge vers 0, ce qui nécessite $\rho(A) < 1$:
$$\boxed{\text{Si } \left(A^k\right) \text{ converge vers 0, alors } \rho(A) < 1.}$$
On admet la réciproque, banale si A est diagonalisable et qui se démontre par exemple à partir de la forme de Jordan sinon.

2) a) En combinant **I-1)** et le **1)c)** ci-dessus, j'ai $[\rho(A)]^k = \rho\left(A^k\right) \leq \widetilde{N}\left(A^k\right)$, d'où, $x \mapsto x^{1/k}$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$,
$$\boxed{\rho(A) \leq \left[\widetilde{N}\left(A^k\right)\right]^{1/k}.}$$

b) Si $\alpha = 0$, le résultat est banal, sinon
$$\det(\alpha A - xI_n) = \alpha^n \det\left(A - \frac{x}{\alpha} I_n\right),$$
d'où il résulte que les valeurs propres de αA sont les $\alpha\lambda$, $\lambda \in \operatorname{Sp} A$, d'où finalement
$$\boxed{\rho(\alpha A) = |\alpha|\, \rho(A).}$$

c) D'après **b)**,

$$\rho(A_\varepsilon) = \frac{1}{\rho(A)+\varepsilon} \cdot \rho(A) < 1,$$

donc, grâce au résultat admis ci-dessus, $\left(A_\varepsilon^k\right)$ converge vers 0, en particulier pour la norme $\widetilde{N}$, d'où par définition de la limite l'existence de k_ε dans $\mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq k_\varepsilon \quad \widetilde{N}\left(A_\varepsilon^k\right) \leq 1 \quad \text{soit} \quad \widetilde{N}\left(A^k\right) \leq (\rho(A)+\varepsilon)^k.$$

Ainsi,

$$\boxed{\rho(A_\varepsilon) < 1 \quad \text{et} \quad \exists k_\varepsilon \; \forall k \geq k_\varepsilon \quad \widetilde{N}\left(A^k\right) \leq (\rho(A)+\varepsilon)^k.}$$

d) En combinant **a)** et **c)**, j'ai,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_\varepsilon \quad \forall k \geq k_\varepsilon \quad \rho(A) \leq \left[\widetilde{N}\left(A^k\right)\right]^{1/k} \leq \rho(A)+\varepsilon \quad \text{d'où} \quad \left|\left[\widetilde{N}\left(A^k\right)\right]^{1/k} - \rho(A)\right| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, par définition de la limite :

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \left[\widetilde{N}\left(A^k\right)\right]^{1/k} = \rho(A).}$$

3) a) Soit $X = (x_j) \in \mathbb{C}^n$. J'ai

$$\forall j \in \mathbb{N}_n \quad \left|(AX)_j\right| = \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right) \cdot N_\infty(X) \leq M_A \cdot N_\infty(X)$$

D'où, par définition de N_∞,

$$\boxed{N_\infty(AX) \leq M_A \cdot N_\infty(X).}$$

Ce qui précède montre que M_A est un majorant de l'ensemble $\mathcal{E} = \left\{\frac{N_\infty(AX)}{N_\infty(X)},\ X \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}\right\}$, dont $\widetilde{N_\infty}(A)$ est le plus petit majorant :

$$\boxed{\widetilde{N_\infty}(A) \leq M_A.}$$

b) Avec les notations de l'énoncé, le vecteur Y est bien défini et $N_\infty(Y) = 1$ (toutes ses composantes sont de module 1) ; de plus, par construction,

$$\text{si } a_{i_0,j} \neq 0,\ a_{i_0,j}y_j = \frac{|a_{i_0,j}|^2}{|a_{i_0,j}|} = |a_{i_0,j}| \quad \text{et} \quad \text{si } a_{i_0,j} = 0,\ a_{i_0,j}y_j = 0 = |a_{i_0,j}|$$

donc

$$\left|(AY)_{i_0}\right| = \left|\sum_{j=1}^n a_{i_0,j}y_j\right| = \left|\sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|\right| = M_A.$$

Ainsi, avec les notations précédentes, $M_A \in \mathcal{E}$ et donc $\widetilde{N_\infty}(A) \geq M_A$. D'où, compte tenu de **1)d)**,

$$\boxed{\widetilde{N_\infty}(A) = M_A.}$$

Partie III

1) Par exemple...

$$\boxed{I_n \geq 0 \text{ et } I_n \neq 0, \text{ tandis que l'on n'a pas } I_n > 0.}$$

2) Déjà, il est clair — de par la définition du produit matriciel — que le produit de deux matrices positives est positif. J'en déduis que, si $M \leq N$ et $P \geq 0$, alors $MP \leq NP$ (en effet, $N - M$ et P sont positives, donc $(M-N)P = MP - NP$ aussi). De même, sous les mêmes hypothèses, $PM \leq PN$.

a) Supposant alors $0 \leq A \leq B$ et $0 \leq A' \leq B'$, j'ai tout de suite $AA' \geq 0$ et

$$AA' \leq AB' \leq BB'$$

en appliquant les propriétés précédentes.

$$\boxed{\text{Si } 0 \leq A \leq B \text{ et } 0 \leq A' \leq B', \text{ alors } 0 \leq AA' \leq BB'.}$$

b) À l'aide du **a)** et d'une récurrence immédiate :

$$\boxed{\text{Si } 0 \leq A \leq B \text{ et } k \in \mathbb{N}^*, \text{ alors } 0 \leq A^k \leq B^k.}$$

c) Supposons $0 \leq A \leq B$, avec $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. J'ai vu que

$$\widetilde{N_\infty}(A) = M_A = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \text{ (puisque les } a_{i,j} \text{ sont positifs ou nuls).}$$

De même pour B, or, comme $A \leq B$,

$$\forall (i,j) \quad a_{i,j} \leq b_{i,j} \quad \text{d'où} \quad \forall i \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leq \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \leq M_B$$

et il en découle $M_A \leq M_B$:

$$\boxed{\text{Si } 0 \leq A \leq B, \text{ alors } \widetilde{N_\infty}(A) \leq \widetilde{N_\infty}(B).}$$

d) D'après **b)** et **c)** ci-dessus, il vient pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\left[\widetilde{N_\infty}\left(A^k\right)\right]^{1/k} \leq \left[\widetilde{N_\infty}\left(B^k\right)\right]^{1/k}.$$

D'où, par passage à la limite grâce au **II-2)d)**,

$$\boxed{\text{Si } 0 \leq A \leq B, \text{ alors } \rho(A) \leq \rho(B).}$$

e) Supposons $0 \leq A < B$, avec $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

Par hypothèse, pour tout (i,j), $0 \leq a_{i,j} < b_{i,j}$.

En particulier tous les $b_{i,j}$ sont strictement positifs, je peux donc poser

$$\gamma = \max_{1\leq i,j\leq n} \frac{a_{i,j}}{b_{i,j}}.$$

Chacune des valeurs $\dfrac{a_{i,j}}{b_{i,j}}$ appartient à $[0,1[$, il en est donc de même de γ, qui est l'une de ces valeurs.

J'ai par construction

$$\forall (i,j) \quad a_{i,j} \leq \gamma b_{i,j} \quad \text{donc} \quad A \leq \gamma B.$$

Si $A = 0$, alors $\gamma = 0$ et je pose $c = \dfrac{1}{2}$; sinon je pose $c = \gamma$. Dans les deux cas, j'ai obtenu

$$\boxed{\text{Si } 0 \leq A < B, \text{ il existe } c \in\,]0,1[\text{ tel que } A \leq cB.}$$

Alors d'après **d)** et **II-2)b)**, $\rho(A) \leq \rho(cB) = c\rho(B)$. Or $c \in\,]0,1[$ et $\rho(B) > 0$ (en effet $\operatorname{tr} B > 0$, donc B admet au moins une valeur propre non nulle !). Finalement

$$\boxed{\rho(A) < \rho(B).}$$

3) D'après l'hypothèse, $X = (1,\ldots,1)$ vérifie $AX = \alpha X$. Ainsi α est valeur propre de A. Donc $\alpha \leq \rho(A)$. Par ailleurs, pour cette matrice A, on a $M_A = \alpha$, d'où d'après **II-3)**, $\widetilde{N_\infty}(A) = M_A = \alpha$. Or d'après **II-1)b)**, $\rho(A) \leq \widetilde{N_\infty}(A)$, d'où finalement

$$\boxed{\rho(A) = \alpha = \widetilde{N_\infty}(A).}$$

4) Si $\alpha = 0$, l'inégalité $\alpha \leq \rho(A)$ est banale. Si $\alpha > 0$, j'ai par construction

$$\forall i \quad \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = \frac{\alpha}{\alpha_i} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \alpha \quad (\alpha_i \geq \alpha > 0)$$

et donc la matrice B vérifie les hypothèses du **3)**, par conséquent $\rho(B) = \alpha$. Par ailleurs, toujours par construction, $0 \leq B \leq A$, d'où grâce au **2)d)** $\rho(B) \leq \rho(A)$. Ainsi dans tous les cas $\alpha \leq \rho(A)$. Enfin, d'après **II-1)c)** et **II-3)b)**, $\rho(A) \leq M_A$ où

$$M_A = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \quad \text{car } A \geq 0.$$

En conclusion,

$$\boxed{\min_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right).}$$

5) Soit $U = AD_x$; il vient pour tout (i,j)

$$u_{i,j} = a_{i,j}x_j.$$

Tous les x_i étant strictement positifs, D_x est inversible et, si je pose $V = D_x^{-1}U$, j'ai

$$v_{i,j} = \frac{1}{x_i}u_{i,j} = \frac{x_j}{x_i}a_{i,j}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall\,(i,j)\quad \left(D_x^{-1}AD_x\right)_{i,j} = \frac{x_j}{x_i}a_{i,j}.}$$

Puisque A et V sont semblables, j'ai $\rho\,(A) = \rho\,(V)$. De plus,

$$\forall i\quad \sum_{j=1}^{n} v_{i,j} = \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \frac{(AX)_i}{x_i}$$

d'où, en appliquant le résultat du **4)** à la matrice V, qui est bien positive,

$$\boxed{\min_{1\leq i\leq n}\frac{(AX)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq i\leq n}\frac{(AX)_i}{x_i}.}$$

6) Si X est vecteur propre strictement positif de A, $AX = \lambda X$ et donc, pour tout i, $\dfrac{(AX)_i}{x_i} = \lambda$ et le **5)** s'applique : $\lambda \leq \rho\,(A) \leq \lambda$, soit

$$\boxed{\lambda = \rho\,(A).}$$

De plus, toujours d'après **5)**,

$$\forall X > 0\quad \min_{1\leq i\leq n}\frac{(AX)_i}{x_i} \leq \rho\,(A)\quad\text{d'où}\quad \sup_{X>0}\left(\min_{1\leq i\leq n}\frac{(AX)_i}{x_i}\right) \leq \rho\,(A)$$

(l'existence de cette borne supérieure ayant été prouvée au passage, puisque $\left\{\min\limits_{1\leq i\leq n}\frac{(AX)_i}{x_i},\ X>0\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par $\rho\,(A)$).

En fait, on a vu au début de cette question que cette borne supérieure est un plus grand élément, atteint pour tout vecteur propre strictement positif de A (on a supposé qu'il en existait !). Le raisonnement est similaire de l'autre côté :

$$\boxed{\rho\,(A) = \sup_{X>0}\left(\min_{1\leq i\leq n}\frac{(AX)_i}{x_i}\right) = \inf_{X>0}\left(\max_{1\leq i\leq n}\frac{(AX)_i}{x_i}\right).}$$

Problème B : polynômes de Bernstein

1) Par définition, pour $x \in [0,1]$,

$$B_n\,(f_i)\,(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^i\binom{n}{k}x^k\,(1-x)^{n-k},$$

tandis que

$$\forall t \in \mathbb{R}\quad \varphi\,(t) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-x)^{n-k}\left(xe^t\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,(1-x)^{n-k}\,e^{kt}.$$

φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall i \in \mathbb{N}\quad \varphi^{(i)}\,(0) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,(1-x)^{n-k}\,k^i\quad\text{d'où}\quad B_n\,(f_i)\,(x) = \frac{\varphi^{(i)}\,(0)}{n^i}.$$

Or par ailleurs, $\varphi\,(0) = 1$ et, pour tout t réel,

$$\begin{aligned}
\varphi'\,(t) &= nxe^t\left(1-x+xe^t\right)^{n-1} \quad\text{d'où}\quad \varphi'\,(0) = nx\\
\varphi''\,(t) &= \varphi'\,(t) + n\,(n-1)\,x^2e^{2t}\left(1-x+xe^t\right)^{n-2} \quad\text{d'où}\quad \varphi''\,(0) = nx + n\,(n-1)\,x^2
\end{aligned}$$

soit finalement

$$\boxed{B_n\,(f_0) = 1,\ B_n\,(f_1) = X,\ B_n\,(f_2) = X^2 + \frac{X\,(1-X)}{n}.}$$

Or, pour $x \in [0,1]$, en développant le carré,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 P_{n,k}(x) &= B_n(f_2)(x) - 2xB_n(f_1)(x) + x^2 B_n(f_0)(x)\\ &= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - 2x^2 + x^2\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\forall x \in [0,1] \quad \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 P_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}.}$$

2) Comme f est ρ-lischitzienne, j'ai par définition de $\mathcal{E}_2$:

$$\forall k \in \mathcal{E}_2 \quad \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \rho\alpha \quad \text{d'où} \quad S_2 \leq \rho\alpha \sum_{k\in\mathcal{E}_2} P_{n,k}(x),$$

or les $P_{n,k}$ sont à valeurs positives sur $[0,1]$, d'où

$$\sum_{k\in\mathcal{E}_2} P_{n,k}(x) \leq \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) = B_n(f_0)(x) = 1.$$

Donc j'ai bien $S_2 \leq \rho\alpha$. D'autre part, toujours grâce à la positivité des $P_{n,k}$ et par définition de M et de $\mathcal{E}_1$

$$\alpha^2 S_1 \leq \sum_{k\in\mathcal{E}_1} 2M\alpha^2 P_{n,k}(x) \leq 2M \sum_{k\in\mathcal{E}_1}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 P_{n,k}(x) \leq 2M\frac{x(1-x)}{n}$$

d'après le **1)** *in fine*. Comme $x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$ (classique), j'ai bien $S_1 \leq \dfrac{M}{2n\alpha^2}$. En conclusion

$$\boxed{S_1 \leq \frac{M}{2n\alpha^2} \text{ et } S_2 \leq \rho\alpha.}$$

Comme $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont disjoints et d'union $[\![0,n]\!]$, j'en déduis, comme $\sum\limits_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) = 1$,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)P_{n,k}(x)\right| \leq S_1 + S_2$$

cela pour tout x de $[0,1]$, d'où

$$N_\infty\big(B_n(f) - f\big) \leq h(\alpha) \quad \text{où} \quad h : \alpha \mapsto \rho\alpha + \frac{M}{2n\alpha^2}.$$

Cette majoration a été établie pour tout $\alpha > 0$, il n'y a plus qu'à optimiser, en choisissant α tel que $h(\alpha)$ soit minimum… Or h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall \alpha > 0 \quad h'(\alpha) = \rho - \frac{M}{n\alpha^3},$$

donc h' est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et s'annule en $\alpha_0 = \left(\dfrac{M}{\rho n}\right)^{1/3}$, ainsi h admet un minimum en α_0 valant

$$h(\alpha_0) = \rho\left(\frac{M}{\rho n}\right)^{1/3} + \frac{M}{2n}\left(\frac{\rho n}{M}\right)^{2/3} = \frac{3}{2}M^{1/3}\rho^{2/3}\frac{1}{n^{1/3}}.$$

J'ai donc bien

$$\boxed{N_\infty\big(B_n(f) - f\big) \underset{n\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right).}$$

Il en résulte que $N_\infty\big(B_n(f) - f\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, autrement dit

$$\boxed{\text{La suite de polynômes } \big(B_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,1].}$$

Problème C

1) Soit $\alpha \in \left]0,1\right[$; pour $t \in [-\alpha,\alpha]$, j'ai $|t| \leq \alpha$, donc $|t|^n \leq \alpha^n \leq \alpha$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [-\alpha,\alpha] \quad |u_n(t)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Comme $\alpha \in \left]0,1\right[$, la série numérique $\sum \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$ converge, ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } \alpha \text{ de } \left]0,1\right[\text{, la série de fonctions } \sum u_n \text{ converge normalement sur } [-\alpha,\alpha].}$$

Les fonctions u_n étant toutes continues sur $\left]-1,1\right[$, donc sur $[-\alpha,\alpha]$, j'en déduis que la fonction somme S est continue sur $[-\alpha,\alpha]$, puisque la convergence est normale, donc uniforme, sur cet intervalle ; cela valant pour tout α de $\left]0,1\right[$, j'ai ainsi :

$$\boxed{S \text{ est continue sur } \left]-1,1\right[.}$$

2) a) Soit $x \geq 1$ fixé ; $|f_k(x)| = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} t^{(k+1)n}$ et $t \in [0,1[$, donc

$$\forall n \in [\![1,\lfloor x \rfloor]\!] \quad t^{(k+2)n} = t^n t^{(k+1)n} \leq t^{(k+1)n} ;$$

il en résulte, en sommant, que

$$|f_{k+1}(x)| \leq |f_k(x)|.$$

De plus, pour tout $n \geq 1$, $\lim_{k\to\infty} t^{(k+1)n} = 0$ et donc

$$\boxed{\text{La suite } (|f_k(x)|)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante, de limite nulle.}}$$

Je déduis du résultat précédent que la série numérique $\sum f_k(x)$ est une série alternée convergeant en vertu du théorème spécial.

La série de fonctions $\sum f_k$ converge donc simplement sur $[1,+\infty[$ et le théorème spécial des séries alternées me fournit une majoration du reste de rang N que je note R_N :

$$\forall x \in [1,+\infty[\quad |R_N(x)| \leq |f_{N+1}(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} t^{(N+2)n} = \frac{t^{N+2}}{1-t^{N+2}}.$$

Ce dernier majorant est indépendant de x et tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini, par conséquent :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_k \text{ converge uniformément sur } [1,+\infty[.}$$

b) Par définition de S, j'ai, pour t fixé dans $[0,1[$, $S(t) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} u_n(t)$, or

$$u_n(t) = t^n \cdot \frac{1}{1-(-t^n)} = t^n \sum_{k=0}^{\infty} (-t^n)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{(k+1)n},$$

donc, puisqu'il s'agit pour x fixé d'un nombre fini de séries convergentes :

$$S(t) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{(k+1)n} \right) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k t^{(k+1)n} \right) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Pour tout k, f_k admet en $+\infty$ la limite $(-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} t^{(k+1)n} = (-1)^k \frac{t^{k+1}}{1-t^{k+1}} = v_k(t)$; comme la série de fonctions $\sum f_k$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$ le théorème de la double limite m'indique que la série $\sum v_k(t)$ converge et que

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t).$$

Finalement

$$\boxed{S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \text{, cela pour tout } t \text{ de } [0,1[.}$$

3) Soient k dans $\mathbb{N}$ et t dans $[0,1]$;

$$t^{k+2} \leq t^{k+1} \quad \text{et} \quad 1+t+\cdots+t^{k+2} \geq 1+t+\cdots+t^{k+1} \quad (\text{car } t^{k+2} \geq 0\ !)\ ;$$

par conséquent

$$|w_{k+1}(t)| \leq |w_k(t)|\ ;$$

de plus, $\forall j \in [\![0,k]\!] \quad t^j \geq t^{k+1}$, d'où

$$|w_k(t)| \leq \frac{t^{k+1}}{(k+1)\,t^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Cette majoration uniforme par rapport à $t \in [0,1]$ me permet d'établir comme au **2)a),** grâce au théorème spécial des séries alternées, que

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum w_k \text{ converge uniformément sur } [0,1].}$$

4) Par construction, j'ai

$$\forall t \in [0,1[\quad (1-t)\,S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-t)\,v_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t)\,.$$

Or, pour tout k, w_k admet en 1 la limite $(-1)^k \dfrac{1}{k+1}$; comme la série de fonctions $\sum w_k$ converge uniformément sur $[0,1]$, les w_k étant continues sur $[0,1]$, la fonction somme est continue sur $[0,1]$ et en particulier

$$\lim_{t\to 1} \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

En rassemblant les deux résultats précédents, j'obtiens

$$\boxed{\lim_{\substack{t\to 1\\ <}} (1-t)\,S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.}$$

La somme de cette dernière série vaut $\ln 2$ (classique...), d'où finalement

$$\boxed{S(t) \underset{1}{\sim} \frac{\ln 2}{1-t}.}$$

Il ne faut jamais hésiter à refaire plusieurs fois un calcul.

Si le résultat change à chaque fois, c'est que vous avez commis toute une série d'erreurs successives. En général, à chaque itération vous parviendrez à identifier la faute commise au calcul précédent.

Si au contraire vous trouvez toujours la même chose, c'est que vous faites une fixation sur une seule erreur, indétectable celle-là.