D.L. 3

Problème A

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes. $0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, I_n représentant la matrice identité.
$GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures à éléments dans $\mathbb{K}$.
Tout vecteur $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbb{K}^n$ est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que l'élément de la i^{e} ligne de X soit x_i. Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{1\leq i\leq p}$ dans $\mathbb{K}^p$, on note $(AX)_i$ le coefficient de la i^{e} ligne de AX.
Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Sp}\,(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on appelle *rayon spectral* de A le réel $\rho(A)$ défini par :

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|.$$

Conformément à l'usage, on note N_∞ la norme définie sur $\mathbb{C}^n$ par :

$$\forall X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n \quad N_\infty(X) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|\,.$$

On qualifie de *norme matricielle* toute norme φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant la propriété :

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2 \quad \varphi(AB) \leq \varphi(A)\cdot\varphi(B).$$

Partie I

On rappelle que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable : il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ telles que $T = P^{-1}AP$.

1) Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\rho\left(A^k\right) = [\rho(A)]^k$.

2) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A si et seulement si la suite $\left(P^{-1}A_kP\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $P^{-1}AP$.

3) a) Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer T^k et en déduire que la suite $\left(T^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si ($|\lambda| < 1$) ou ($\lambda = 1$ et $\mu = 0$).

b) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de A pour que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable. Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\rho(A) < 1$. Dans ce cas, préciser $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k$.

d) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\rho(A)$ pour que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Partie II

1) Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et N une norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$. On pose :

$$\widetilde{N}(A) = \sup_{X\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{N(AX)}{N(X)}.$$

a) Montrer que l'on définit ainsi une norme $\widetilde{N}$ sur $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$, appelée *norme subordonnée à N*.

b) Montrer que $\widetilde{N}$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

c) En considérant une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, montrer que :
$$\rho(A) \leq \widetilde{N}(A).$$

d) Montrer que si $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0_n$, alors $\rho(A) < 1$.

Dans la suite du problème, on admettra réciproquement que, si $\rho(A) < 1$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0_n$.

2) **a)** Montrer que pour tout k entier naturel non nul : $\rho(A) \leq \left[\widetilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}}$.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\rho(\alpha A) = |\alpha|\,\rho(A)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$ et $A_\varepsilon = \dfrac{1}{\rho(A)+\varepsilon} \cdot A$. Vérifier que $\rho(A_\varepsilon) < 1$ et en déduire l'existence d'un entier naturel k_ε tel que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left(k \geq k_\varepsilon \Rightarrow \widetilde{N}\left(A^k\right) \leq (\rho(A)+\varepsilon)^k\right).$$

d) En déduire $\lim\limits_{k\to+\infty} \left[\widetilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

3) *Exemple de norme subordonnée* : pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose
$$M_A = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,.$$

a) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$: $N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X)$. En déduire que : $\widetilde{N_\infty}(A) \leq M_A$.

b) Soit i_0 un entier compris entre 1 et n tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = M_A$. En considérant le vecteur Y de $\mathbb{C}^n$ de composantes y_j définies par :
$$y_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} \quad \text{si} \quad a_{i_0,j} \neq 0 \quad \text{et} \quad y_j = 1 \quad \text{si} \quad a_{i_0,j} = 0,$$
montrer que $M_A \leq \widetilde{N_\infty}(A)$ et en déduire $\widetilde{N_\infty}(A) = M_A$.

Partie III

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite *positive* (resp. *strictement positive*) et on note $A \geq 0$ (*resp.* $A > 0$) si et seulement si tous ses coefficients sont positifs ou nuls (*resp.* strictement positifs). Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $A \geq B$ (*resp.* $A \leq B$, $A > B$, $A < B$) si et seulement si $A - B \geq 0$ (*resp.* $B - A \geq 0$, $A - B > 0$, $B - A > 0$).
Notons que grâce à l'identification de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pourra parler de vecteur de $\mathbb{R}^n$ positif ou strictement positif.

1) Donner un exemple de matrice A montrant que les conditions $A \geq 0$ et $A \neq 0$ n'impliquent pas nécessairement $A > 0$.

2) A, B, A', B' désignent des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si $0 \leq A \leq B$ et $0 \leq A' \leq B'$, alors $0 \leq AA' \leq BB'$.

b) Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq A^k \leq B^k$.

c) Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors $\widetilde{N_\infty}(A) \leq \widetilde{N_\infty}(B)$.

d) Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors $\rho(A) \leq \rho(B)$.

e) Montrer que si $0 \leq A < B$, il existe $c \in\,]0,1[$ tel que $A \leq cB$ et en déduire $\rho(A) < \rho(B)$.

3) Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la somme des termes de chaque ligne soit constante égale à α. Montrer que α est valeur propre de A et que :

$$\rho(A) = \alpha = \widetilde{N_\infty}(A).$$

4) Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note α_i la somme des termes de la i^{e} ligne de A et $\alpha = \min\limits_{1 \le i \le n} \alpha_i$. On définit la matrice $B = (b_{i,j})$ par $B = 0_n$ si $\alpha = 0$ et $b_{i,j} = \dfrac{\alpha}{\alpha_i} a_{i,j}$ si $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la matrice B ainsi construite que :

$$\min_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right) \le \rho(A) \le \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right).$$

5) Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = (x_i)$ un vecteur strictement positif de $\mathbb{R}^n$.

On note D_x la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant pour termes diagonaux $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Calculer les éléments de la matrice $D_x^{-1} A D_x$ et en déduire :

$$\min_{1 \le i \le n} \frac{(AX)_i}{x_i} \le \rho(A) \le \max_{1 \le i \le n} \frac{(AX)_i}{x_i}.$$

6) Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet un vecteur propre strictement positif, alors la valeur propre associée est $\rho(A)$ et :

$$\rho(A) = \sup_{X>0} \left(\min_{1 \le i \le n} \frac{(AX)_i}{x_i} \right) = \inf_{X>0} \left(\max_{1 \le i \le n} \frac{(AX)_i}{x_i} \right).$$

Problème B : polynômes de Bernstein

Les *polynômes de Bernstein* sont définis par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in [\![0, n]\!] \quad P_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$.

Pour toute fonction f définie sur $[0,1]$, *le polynôme d'approximation de Bernstein d'indice n de f* est :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}.$$

On peut montrer que, si f est continue sur $[0,1]$, alors la suite de polynômes $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ (mais la preuve utilise des notions franchement hors programme...).

Le but de ce problème est de prouver la convergence uniforme lorsque f est ρ-lipschitzienne sur $[0,1]$. On pose $M = N_\infty(f) = \sup\limits_{[0,1]} |f|$.

1) Soit $n \ge 2$. Déterminer $B_n(f_i)$, où $f_i : x \mapsto x^i$, $i = 0, 1, 2$ *(on pourra utiliser $\varphi : t \mapsto \left(1 - x + xe^t\right)^n$).*

En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 P_{n,k}(x)$, pour $x \in [0,1]$.

2) Pour x fixé dans $[0,1]$ et $\alpha > 0$, on considère les deux ensembles

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ k \in [\![0, n]\!] \ / \ \left| \frac{k}{n} - x \right| > \alpha \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2 = \left\{ k \in [\![0, n]\!] \ / \ \left| \frac{k}{n} - x \right| \le \alpha \right\}$$

ainsi que les deux sommes :

$$S_1 = \sum_{k \in \mathcal{E}_1} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| P_{n,k}(x) \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k \in \mathcal{E}_2} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| P_{n,k}(x)$$

Montrer que : $S_2 \le \rho\alpha$ et que $S_1 \le \dfrac{M}{2n\alpha^2}$. En déduire que : $N_\infty\left(B_n(f) - f\right) \underset{n \to \infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^{1/3}}\right)$.

Conclusion ?

Problème C

On étudie dans ce problème la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \left]-1,1\right[\quad u_n(t) = \frac{t^n}{1+t^n}\ .$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-\alpha,\alpha]$ pour tout α dans $\left]0,1\right[$.
En déduire que la fonction somme $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est définie et continue sur $\left]-1,1\right[$.

2) On fixe pour cette question un élément t de $\left[0,1\right[$. Pour x réel, la partie entière de x est notée $\lfloor x \rfloor$.
Pour k entier naturel, on définit sur $\left[1,+\infty\right[$ la fonction f_k par :

$$\forall x \geq 1 \quad f_k(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} t^{(k+1)n}.$$

a) Montrer que, pour x fixé dans $\left[1,+\infty\right[$, la suite $(|f_k(x)|)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, de limite nulle.
En déduire que la série de fonctions $\sum f_k$ converge uniformément sur $\left[1,+\infty\right[$.

b) En remarquant que

$$S(t) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, t^{(k+1)n} \right),$$

établir à l'aide du théorème de la double limite :

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \quad \text{où} \quad v_k(t) = (-1)^k \frac{t^{k+1}}{1-t^{k+1}}.$$

3) Montrer que la série de fonctions $\sum w_k$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad w_k(t) = (-1)^k \frac{t^{k+1}}{1+t+t^2+\cdots+t^k}$$

converge uniformément sur $[0,1]$.

4) Déduire des questions précédentes l'existence et la valeur de $\lim_{t \overset{<}{\to} 1} (1-t)\,S(t)$, puis un équivalent de $S(t)$ au voisinage de 1.

Les choses doivent être aussi simples que possible, mais pas plus.

(Albert Einstein)