Problème A : théorème de Cayley-Hamilton

1) a) Par définition, x appartient à $F_{u,x}$ (en effet $x = u^0(x)$). En outre, $F_{u,x}$ est engendré par la famille $(u^p(x))_{p\in\mathbb{N}}$, donc $u(F_{u,x})$ est engendré par la famille $(u^{p+1}(x))_{p\in\mathbb{N}}$: il en résulte que $u(F_{u,x}) \subset F_{u,x}$.

$F_{u,x}$ est donc un sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par u.

Soit maintenant G un sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par u. Je dois montrer que $F_{u,x} \subset G$. Or x est dans G et G est stable par u ; une récurrence immédiate prouve alors que : $\forall p \in \mathbb{N} \quad u^p(x) \in G$. D'où, puisque G, en tant que sous-espace vectoriel, est stable par combinaisons linéaires, $F_{u,x} \subset G$. En conclusion :

$$\boxed{F_{u,x} \text{ est le plus petit sous-espace vectoriel de } E \text{ contenant } x \text{ et stable par } u.}$$

b) Puisque x est non nul par hypothèse, $F_{u,x} \neq \{0\}$. Si $u\,(x)$ colinéaire à x, tous les $u^p(x)$, $p \in \mathbb{N}$, sont colinéaires à x (récurrence immédiate) ; $F_{u,x}$ est alors la droite vectorielle engendrée par x :

$$\boxed{\text{Si } u\,(x) \text{ est colinéaire à } x, \text{ alors } F_{u,x} \text{ est de dimension } 1.}$$

c) La famille $(u^j(x))_{0\le j\le m-1}$ est une famille de m vecteurs de $F_{u,x}$ qui est de dimension m par hypothèse ; je vais montrer par l'absurde que c'est une famille libre : je suppose l'existence d'une famille $(\lambda_j)_{0\le j\le m-1}$ de scalaires non tous nuls tels que $\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j u^j(x) = 0$. Soit alors k le plus grand des indices j tels que $\lambda_j \neq 0$; $u^k(x)$ s'écrit donc comme combinaison linéaire de $(u^j(x))_{0\le j\le k-1}$; par une récurrence banale, j'en déduis qu'il en est de même de tous les $u^p(x)$, $p \ge k$, d'où une contradiction, puisque la famille $(u^j(x))_{0\le j\le k-1}$ engendrerait $F_{u,x}$ alors qu'elle comporte au plus $m-1$ vecteurs. Finalement :

$$\boxed{(u^j(x))_{0\le j\le m-1} \text{ est une base de } F_{u,x}.}$$

2) a) Soit $(\lambda_j)_{0\le j\le n-1}$ une famille de scalaires tels que $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j u^j = 0$. En évaluant en x_0, j'obtiens $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j u^j(x_0) = 0$ et donc tous les λ_j sont nuls puisque la famille $(u^j(x_0))_{0\le j\le n-1}$ est libre. Donc :

$$\boxed{\text{La famille } (u^j)_{0\le j\le n-1} \text{ est libre dans } \mathcal{L}(E).}$$

b) L'implication (**i**) $\Rightarrow$ (**ii**) est banale.

Je suppose que $v(x_0) = w(x_0)$; j'en déduis que : $\forall j \in \mathbb{N} \quad u^j\,[v(x_0)] = u^j\,[w(x_0)]$.

Or v et w commutent avec u, donc avec les puissances de u (récurrence évidente).

D'où : $\forall j \in \mathbb{N} \quad v\left[u^j(x_0)\right] = w\left[u^j(x_0)\right]$.

En particulier, v et w donnent la même image de la base $(u^j(x_0))_{0\le j\le n-1}$; par conséquent $v = w$. En conclusion :

$$\boxed{(\mathbf{i}) \Leftrightarrow (\mathbf{ii})}$$

c) Il est clair que les u^j sont dans $\mathcal{C}(u)$; d'après **a),** la famille $(u^j)_{0\le j\le n-1}$ est libre, il me reste à prouver qu'elle engendre $\mathcal{C}(u)$. Soit donc $v \in \mathcal{C}(u)$; le vecteur $v(x_0)$ se décompose dans la base $(u^j(x_0))_{0\le j\le n-1}$ de E : $v(x_0) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j u^j(x_0)$. Alors les éléments v et $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j u^j$ de $\mathcal{C}(u)$ coïncident en x_0, il sont donc égaux d'après la question précédente et v appartient bien à $\mathrm{Vect}(u^j)_{0\le j\le n-1}$. En conclusion :

$$\boxed{\mathcal{B} = (u^j)_{0\le j\le n-1} \text{ est une base de } \mathcal{C}(u).}$$

d) Le vecteur $u^n(x_0)$ se décompose dans la base $(u^j(x_0))_{0\le j\le n-1}$ de E, donc :

$$\boxed{\text{Il existe une unique famille } (a_j)_{0\le j\le n-1} \text{ de scalaires tels que : } u^n(x_0) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j u^j(x_0).}$$

Alors la matrice de u dans la base $(u^j(x_0))_{0\leq j\leq n-1}$ s'écrit :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$; il s'agit (au signe près) de calculer le déterminant suivant :

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix}.$$

J'effectue (habilement) l'opération suivante sur les lignes : $L_1 \leftarrow L_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} \lambda^{i-1}.L_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda^{i-1}.L_i$, qui ne modifie pas la valeur du déterminant, puisque j'ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres.

Suite à cette opération, pour tout j dans $[\![1, n-1]\!]$, la valeur située sur L_1 dans la colonne j (qui ne comportait que deux termes non nuls, $-\lambda$ en ligne i et 1 en ligne $i+1$) vaut :

$$\lambda^{i-1}.(-\lambda)+\lambda^{i}.1=0$$

et la valeur située sur L_1 en colonne n vaut :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\lambda^{i-1}.a_{i-1}+\lambda^{n-1}.(a_{n-1}-\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\lambda^k-\lambda^n=-P(\lambda) \quad \text{où} \quad P=X^n-\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k.$$

Il n'y a plus qu'à développer par rapport à cette première ligne :

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -P(\lambda) \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix}=(-1)^{1+n}\big(-P(\lambda)\big)\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Or ce dernier déterminant vaut 1 (matrice triangulaire supérieure !).

Finalement, du fait que $\chi_A(\lambda)=(-1)^n\det(A-\lambda I)$,

$$\boxed{\chi_A=X^n-\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k.}$$

N.B. Ce résultat est important, car il montre que tout polynôme de terme dominant X^n peut être vu comme le polynôme caractéristique d'une certaine matrice carrée d'ordre n (et donc d'un certain endomorphisme).

Nous venons d'établir que :

$$\boxed{\chi_u(X)=X^n-\sum_{j=0}^{n-1}a_jX^j.}$$

Par définition même des a_j, il en découle $[\chi_u(u)](x_0)=0$, d'où d'après **b)** :

$$\boxed{\chi_u(u)=0.}$$

3) a) Je choisis une base de E adaptée à F, plus précisément constituée d'une base $\mathcal{B}_F$ de F complétée grâce au théorème de la base incomplète. F étant stable par u, la matrice de u dans cette base est triangulaire par blocs, de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A est la matrice de v dans la base $\mathcal{B}_F$.

Il en résulte que : $\forall t \in \mathbb{K} \quad \chi_u(t) = \chi_v(t).\det(t.I - C)$ et donc

$$\boxed{\chi_v \text{ divise } \chi_u.}$$

b) $F_{u,x}$ est stable par u et, par construction, l'endomorphisme v induit par u sur $F_{u,x}$ est cyclique. En effet $F_{u,x} = F_{v,x}$ puisque : $\forall p \in \mathbb{N} \quad v^p(x) = u^p(x)$.

$$\boxed{u \text{ induit sur } F_{u,x} \text{ un endomorphisme cyclique } v.}$$

Alors, d'après **2)d),** $\chi_v(v)$ est l'endomorphisme nul de $F_{u,x}$; en particulier, $[\chi_v(v)](x) = 0$. Or v est induit par u, donc $[\chi_v(u)](x) = [\chi_v(v)](x) = 0$. Et comme, d'après **a)**, χ_v divise χ_u, j'en déduis que χ_u est de la forme $Q \times \chi_v$, avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et donc que $\chi_u(u) = Q(u) \circ \chi_v(u)$. D'où :

$$\boxed{[\chi_u(u)](x) = 0.}$$

c) D'après la question précédente, pour tout x non nul de E, $[\chi_u(u)](x) = 0$. Or $\chi_u(u)$ est un endomorphisme de E et donc s'annule aussi en 0 :

$$\boxed{\chi_u(u) = 0.}$$

Problème B

Partie I

1) a) Soit, pour tout (i,j), $u_{i,j} = \operatorname{Can} E_{i,j}$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice élémentaire $E_{i,j}$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $u_{i,j}$ est caractérisé par l'image de $\mathcal{B}$:

$$\forall p \in [\![1,n]\!] \quad u_{i,j}(e_p) = \delta_{p,j}.e_i.$$

Soient maintenant j, k, q, r quatre éléments de $[\![1,n]\!]$:

$$\forall p \in [\![1,n]\!] \quad u_{j,k} \circ u_{q,r}(e_p) = u_{j,k}(\delta_{p,r}.e_q) = \delta_{p,r}\delta_{q,k}.e_j = \delta_{k,q}.u_{j,r}(e_p).$$

Par conséquent, les endomorphismes $u_{j,k} \circ u_{q,r}$ et $\delta_{k,q}.u_{j,r}$ coïncident sur $\mathcal{B}$ donc sont égaux, soit matriciellement :

$$\boxed{E_{j,k} \times E_{q,r} = \delta_{k,q}.E_{j,r}.}$$

b) On vérifie aisément (et c'est au programme !) que l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ sur les lignes de la matrice A correspond à la multiplication à gauche de A par $I + \lambda.E_{i,j}$. De même, l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ sur les colonnes de la matrice A correspond à la multiplication à droite de A par $I + \lambda.E_{i,j}$.

Remarquons que toute matrice de la forme $I + \lambda.E_{i,j}$, où $i \neq j$ a pour déterminant 1 (c'est une matrice triangulaire ne comportant que des 1 sur la diagonale !).

Nous appellerons ces matrices *matrices de transvection* (c'est leur nom dans la "littérature").

2) Par hypothèse, je dispose de k dans $[\![1,n]\!]$ tel que $a_{1,k} \neq 0$. Si $k \neq 1$, alors l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + \dfrac{1 - a_{1,1}}{a_{1,k}} C_k$ va mettre un 1 en position (1,1).

Reste à traiter le cas où $a_{1,1} \neq 0$ et $a_{1,j} = 0$ pour tout j de $[\![2,n]\!]$; dans ce cas, j'effectue dans un premier temps l'opération $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$, qui met $a_{1,1}$ à la place de 0 en position (1,2), et je suis ramené au cas précédent.

Dans tous les cas, j'ai obtenu une matrice Q_0, produit d'une ou deux matrices de transvection, telle que AQ_0 ait un 1 en position (1,1).

Je peux alors effectuer sur AQ_0 successivement les opérations élémentaires :

$$L_i \leftarrow L_i - a_{i,1}L_1 \quad \text{pour } i = 2..n, \quad \text{puis} \quad C_j \leftarrow C_j - a_{1,j}C_1 \quad \text{pour } j = 2..n$$

qui vont transformer AQ_0 en une matrice de la forme requise par l'énoncé, cela grâce à des multiplications à gauche, puis à droite, par des matrices de transvection :

$$\boxed{\text{Il existe } P \text{ et } Q\text{, produits de matrices de transvection, telles que } PAQ = B \text{ de l'énoncé.}}$$

3) Je procède par récurrence. Soit, pour $n \geq 2$, $\mathcal{P}_n$ le prédicat : "pour tout $r \in [\![1,n]\!]$ et toute matrice A de rang r dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe d dans $\mathbb{K}^*$ et P, Q produits de matrices de transvection telles que $PAQ = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, d, 0, \ldots, 0)$, où d est en position (r,r)".

- $\mathcal{P}_2$ est vrai : cela découle du **2)**, où B' est d'ordre 1 si A est d'ordre 2 ! Pour $r = 1$, $B' = 0$ et $d = 1$ convient ; pour $r = 2$, B' s'identifie à un scalaire non nul d et $PAQ = \operatorname{diag}(1, d)$.
- Hypothèse de récurrence : supposons $n \geq 3$ tel que $\mathcal{P}_{n-1}$ soit vrai
- Soit alors $r \in [\![1, n]\!]$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r. Si la première ligne L_1 de A est nulle, je choisis i dans $[\![2, n]\!]$ tel que L_i comporte au moins un élément non nul (il en existe, sinon A serait la matrice nulle or elle est de rang $r \geq 1$). J'effectue alors l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + L_i$ qui va recopier L_i dans L_1.

  Je peux alors appliquer le résultat du **2)** (à A ou à son produit à gauche par une matrices de transvection), ce qui me fournit P, Q, produits de matrices de transvection, et $B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que
$$P_1 A Q_1 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
  où B' est de rang $r - 1$ (B étant de rang r, comme A, puisque P_1 et Q_1 sont inversibles car de déterminant 1).

  Si $r = 1$, alors $B' = 0$ et $B = \operatorname{diag}(1, 0, \ldots, 0)$ est déjà de la forme souhaitée (avec $d = 1$).

  Sinon $r - 1 \in [\![1, n-1]\!]$ et j'applique l'hypothèse de récurrence à B', ce qui me fournit d dans $\mathbb{K}^*$ et P', Q' produits de matrices de transvection de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que
$$P'B'Q' = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, d, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}),$$
  où d est en position $(r-1, r-1)$.

  Or si les T'_k sont des matrices de transvection de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, il est clair que les
$$T_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T'_k & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
  sont des matrices de transvection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que (produits par blocs)
$$\prod T_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \prod T'_k & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$
  En "augmentant" ainsi P', Q', j'ai trouvé P, Q produits de matrices de transvection dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que
$$PBQ = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, d, 0, \ldots, 0)$$
  où d est maintenant en position (r, r), puisqu'un 1 est venu s'insérer en début de liste !

  Or $PBQ = (PP_1)\, A\, (Q_1 Q)$ et PP_1, $Q_1 Q$ sont toujours des produits de matrices de transvection. Cela prouve $\mathcal{P}_n$ et achève la démonstration par récurrence.

$$\boxed{\mathcal{P}_n \text{ est vrai pour tout } n \geq 2.}$$

Si $r = n$, on peut tout de suite remarquer que $d = \det A$. En effet, selon la remarque finale du **1)**, tout produit de matrices de transvection a pour déterminant 1, donc $PAQ = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, d)$ donne $\det A = d$.

$$\boxed{\text{Si } r = n, \text{ alors } d = \det A.}$$

Si $r < n$, je peux reprendre l'idée du **2)** : j'effectue successivement sur PAQ les opérations élémentaires $L_n \leftarrow L_n + \dfrac{1}{d} L_r$ (qui place un 1 en position (n, r), le reste de la ligne n étant toujours nul), puis $L_r \leftarrow L_r + (1-d)\, L_n$ (qui place un 1 en position (r, r) à la place de d) et enfin $L_n \leftarrow L_n - L_r$ qui remet à 0 la ligne n. Comme $r \neq n$, ces trois opérations correspondent bien à des produits à gauche par des matrices de transvection, donc, quitte à modifier un peu P :

$$\boxed{\text{Si } r < n, \text{ on peut choisir } d = 1.}$$

4) **a)** Vu son interprétation en termes d'opération élémentaire, on se doute que l'inverse de $I + \lambda E_{i,j}$ est $I - \lambda E_{i,j}$, ce que l'on vérifie par le calcul, puisque $E_{i,j}^2 = 0$ du fait que $i \neq j$:

$$(I + \lambda E_{i,j})(I - \lambda E_{i,j}) = I - (\lambda E_{i,j})^2 = I,$$

la première égalité étant assurée par le fait que I et $\lambda E_{i,j}$ commutent (on peut aussi développer naïvement).

$$\boxed{(I + \lambda E_{i,j})^{-1} = I - \lambda E_{i,j}.}$$

On constate donc que les inverses des matrices de transvection sont encore des matrices de transvection !

b) Soit $A \in SL_n(\mathbb{K})$. A est de rang n et $\det A = 1$ donc le **3)** me fournit P, Q produits de matrices de transvection telles que $PAQ = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 1) = I$! D'où $A = P^{-1}Q^{-1}$, qui est un produit de matrices de transvection d'après **a)**. Autrement dit,

$$\boxed{\text{Les matrices de transvection engendrent } SL_n(\mathbb{K}).}$$

5) Soient $A = I + \alpha E_{q,r}$ et $B = I + \beta E_{s,t}$ deux matrices de transvection. Je calcule

$$\begin{aligned} A^{-1}B^{-1} &= (I - \alpha E_{q,r})(I - \beta E_{s,t}) \\ &= I - \alpha E_{q,r} - \beta E_{s,t} + \alpha\beta\delta_{r,s}E_{q,t} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} AB &= (I + \alpha E_{q,r})(I + \beta E_{s,t}) \\ &= I + \alpha E_{q,r} + \beta E_{s,t} + \alpha\beta\delta_{r,s}E_{q,t} \end{aligned}$$

d'où, après simplification,

$$A^{-1}B^{-1}AB = I - \alpha\beta\delta_{t,q}E_{s,r} - \alpha\beta^2\delta_{r,s}\delta_{t,q}E_{s,t} + \alpha\beta\delta_{r,s}E_{q,t} + \alpha^2\beta\delta_{r,s}\delta_{q,t}E_{q,r}.$$

Soit alors $I + \lambda E_{i,j}$ une matrice de transvection. Je choisis par exemple

$$q = i,\ t = j,\ r = s \notin \{i, j\},\ \alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta = \lambda$$

(le choix de $r = s \notin \{i, j\}$ est possible grâce à l'hypothèse $n \geq 3$!).

Comme $i \neq j$, j'ai $t \neq q$ et il reste $A^{-1}B^{-1}AB = I + \lambda E_{i,j}$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{Toute matrice de transvection s'écrit } A^{-1}B^{-1}AB \text{ avec } A,\ B \text{ matrices de transvection.}}$$

Partie II

1) D'après le résultat précédent ($n \geq 3$), la matrice de transvection $I + tE_{i,j}$ s'écrit sous la forme $A^{-1}B^{-1}AB$.

Or, d'après la condition $(*)$ réitérée,

$$\begin{aligned} \phi\left(A^{-1}B^{-1}AB\right) &= \phi\left(A^{-1}\right)\phi\left(B^{-1}\right)\phi(A)\phi(B) \\ &= \phi\left(A^{-1}\right)\phi(A)\phi\left(B^{-1}\right)\phi(B) \quad \text{car } \mathbb{K} \text{ est commutatif !} \\ &= \phi(I)^2 \quad \text{d'après } (*) \end{aligned}$$

Mais $I = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$ et donc $\phi(I) = 1$ d'après $(**)$. Finalement,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{K} \quad f(t) = 1.}$$

2) Le résultat précédent, agrémenté d'une récurrence banale, montre que tout produit P de matrices de transvection vérifie $\phi(P) = 1$. Soit donc $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de rang r, et, avec les notations du **I-3)**, d, P et Q telles que

$$PXQ = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, d, 0, \ldots, 0).$$

D'après $(*)$ et la remarque précédente, $\phi(PXQ) = \phi(X)$.

Or, si $r < n$, il y a au moins un 0 sur la diagonale, donc d'après $(**)$ $\phi(X) = 0 = \det X$.

Enfin, si $r = n$, toujours d'après $(**)$, $\phi(X) = d = \det X$ (cf. **I-3)**).

J'ai ainsi conclu dans tous les cas :

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \phi(X) = \det X.}$$

Partie III

1) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. J'établis d'abord le résultat pour T matrice de transvection. Comme $n \geq 3$, T s'écrit $A^{-1}B^{-1}AB$, d'où, grâce à la propriété vérifiée par ψ (qui permet d'échanger les deux dernières matrices d'un produit de trois matrices) :

$$\psi(XT) = \psi\left(\left(XA^{-1}\right)B^{-1}(AB)\right) = \psi\left(\left(XA^{-1}\right)(AB)B^{-1}\right) = \psi(X).$$

De même,

$$\psi(TX) = \psi\left(A^{-1}B^{-1}(ABX)\right) = \psi\left(A^{-1}(ABX)B^{-1}\right) = \psi\left(BXB^{-1}\right) = \psi\left(BB^{-1}X\right) = \psi(X).$$

Par récurrence, il en résulte que $\psi(X)$ ne change pas lorsqu'on multiplie X (à droite ou à gauche), par un nombre fini de matrices de transvection. Donc, d'après **I-4)b)**,

$$\boxed{\forall U \in SL_n(\mathbb{K}) \quad \psi(XU) = \psi(X) = \psi(UX).}$$

2) a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de rang $r < n$. D'après **I-3)**, je dispose de P et Q dans $SL_n(\mathbb{K})$ telles que $PAQ = X_r$ (on peut choisir $d = 1$!). Mais d'après **1)**

$$\psi(PAQ) = \psi(PA) = \psi(A) \quad \text{d'où} \quad \psi(A) = \psi(X_r),$$

cela pour toute matrice A de rang $r < n$. Il en résulte que, si A et B sont deux matrices de même rang $r < n$

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont deux matrices de même rang } r < n, \text{ alors } \psi(A) = \psi(B)\left(= \psi(X_r)\right).}$$

b) Nous noterons $X_0 = 0$. En notant toujours $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, pour tout $r \in [\![0, n]\!]$ l'endomorphisme $u_r = \operatorname{Can} X_r$ est défini par l'image de $\mathcal{B}$: $u_r(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{si } j \leq r \\ 0 & \text{si } j \geq r+1 \end{cases}$.

Pour $r \in [\![1, n-1]\!]$, je définis alors $v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ par : $v(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{si } j \leq r-1 \\ 0 & \text{si } r \leq j \leq n-1 \\ e_r & \text{si } j = n \end{cases}$.

Il vient :

$$v \circ u_r(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{si } j \leq r-1 \\ 0 & \text{si } j = r \\ 0 & \text{si } j \geq r+1 \end{cases} \quad \text{et} \quad u_r \circ v(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{si } j \leq r-1 \\ 0 & \text{si } r \leq j \leq n-1 \\ e_r & \text{si } j = n \end{cases}.$$

De plus v est de rang r, puisque par construction $\operatorname{Im} v = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$.

Par conséquent, en notant $Y = M_{\mathcal{B}}(v)$, j'ai

$$\boxed{Y \text{ est une matrice de rang } r \text{ vérifiant : } YX_r = X_{r-1} \quad \text{et} \quad X_rY = Y.}$$

c) D'après les résultats précédents,

$$\psi(X_{r-1}) = \psi(YX_r) = \psi(X_rYX_r) = \psi(X_rX_rY) \text{ d'après l'hypothèse sur } \psi.$$

Or $X_r^2 = X_r$ donc $\psi(X_{r-1}) = \psi(X_rY) = \psi(Y)$.

Mais Y est de rang r donc, d'après **a)**, $\psi(Y) = \psi(X_r)$, d'où finalement

$$\psi(X_{r-1}) = \psi(X_r) \text{ cela pour tout } r \text{ dans } [\![1, n-1]\!].$$

Par une récurrence banale, il en résulte que : $\forall r \in [\![1, n-1]\!] \quad \psi(X_r) = \psi(X_0) = \psi(0)$.

En combinant ce résultat avec celui du **a)**, j'obtiens

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } X \text{ de rang } r < n, \psi(X) = \psi(0).}$$

3) Soient X, Y dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\det X = \det Y$.

- <u>Soit $\det X = \det Y = 0$</u> : dans ce cas $\operatorname{rg} X < n$ et $\operatorname{rg} Y < n$, donc le **2)c)** nous indique que
$$\psi(X) = \psi(0) \quad \text{et} \quad \psi(Y) = \psi(0) \quad \text{d'où} \quad \psi(X) = \psi(Y).$$
- <u>Soit $\det X = \det Y = d \neq 0$</u> : dans ce cas X est de rang n et je dispose d'après **I-3)** de P et Q dans <u>$SL_n(\mathbb{K})$ telles que $PXQ = D$</u> où $D = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, d)$. Or d'après **1)**
$$\psi\left((PX)Q\right) = \psi(PX) = \psi(X).$$
Donc $\psi(X) = \psi(D)$ et de même $\psi(Y) = \psi(D)$ d'où $\psi(X) = \psi(Y)$!

En conclusion $\psi(X) = \psi(Y)$ dans tous les cas. Finalement

$$\boxed{\det X = \det Y \Rightarrow \psi(X) = \psi(Y).}$$