D.L. 2

Problème A : théorème de Cayley-Hamilton

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $n \geq 2$.
$\mathcal{C}(u)$ désigne, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, le *commutant* de u, c'est-à-dire l'ensemble des éléments v de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant : $v \circ u = u \circ v$.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, $F_{u,x}$ désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\left(u^p(x)\right)_{p\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini des vecteurs $u^p(x)$, $p \in \mathbb{N}$.

Un élément u de $\mathcal{L}(E)$ est dit *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur x de E tel que $E = F_{u,x}$.
Le but du problème est de prouver le *théorème de* Cayley-Hamilton, qu'il conviendra donc de ne pas utiliser !

1) Soit x un vecteur non nul de E et u un endomorphisme de E.

a) Montrer que $F_{u,x}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par u .

b) Lorsque $u(x)$ est colinéaire à x, quelle est la dimension de $F_{u,x}$?

c) On suppose que $\dim F_{u,x} = m$. Montrer que la famille $\left(u^j(x)\right)_{0\leq j\leq m-1}$ est une base de $F_{u,x}$.

2) On suppose, dans cette question, u cyclique.
Soit x_0 un vecteur de E tel que $E = F_{u,x_0}$; $\left(u^j(x_0)\right)_{0\leq j\leq n-1}$ est donc une base de E.

a) Montrer que la famille d'endomorphismes $\left(u^j\right)_{0\leq j\leq n-1}$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

b) Soient v, w deux éléments de $\mathcal{C}(u)$. Démontrer l'équivalence entre les deux propriétés :

$$\textbf{(i)} \quad v = w \,; \qquad \textbf{(ii)} \quad v(x_0) = w(x_0)$$

c) Montrer que $\mathcal{B} = \left(u^j\right)_{0\leq j\leq n-1}$ est une base de $\mathcal{C}(u)$.

d) On pose $u^n(x_0) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j.u^j(x_0)$.

Après avoir justifié l'existence de la famille $(a_j)_{0\leq j\leq n-1}$, écrire, pour tout λ dans $\mathbb{K}$,

$$\chi_u(\lambda) = \det(\lambda.\mathrm{Id}_E - u)$$

à l'aide de λ et desdits coefficients a_j, $0 \leq j \leq n-1$.
(Le polynôme χ_u ainsi défini est *le polynôme caractéristique de* u.)
En déduire que $\chi_u(u) = 0$.

3) On revient au cas général : u est un endomorphisme quelconque de E.

a) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, $F \neq \{0\}$.
On note v l'endomorphisme de F induit par u.
Montrer que le polynôme caractéristique χ_v de v divise le polynôme caractéristique χ_u de u.

b) Soit x un vecteur de E, $x \neq 0$. Montrer que u induit sur $F_{u,x}$ un endomorphisme cyclique v.
En déduire que

$$[\chi_u(u)](x) = 0.$$

c) Montrer enfin que

$$\chi_u(u) = 0$$

(théorème de Cayley-Hamilton *!).*

Problème B

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier positif, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur le corps $\mathbb{K}$, I l'élément unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $SL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de déterminant 1.

Partie I

1) *On suppose, jusqu'au* **I.4**, *que* $n \geq 2$.

a) On désigne par $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les termes sont nuls, sauf le terme intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui est égal à 1. Vérifier que

$$E_{j,k} \times E_{q,r} = \delta_{k,q}.E_{j,r} \quad \text{où} \quad \delta_{k,q} = 0 \text{ si } k \neq q \text{ et } 1 \text{ si } k = q.$$

b) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'addition à un vecteur ligne de A d'un vecteur proportionnel à un autre vecteur ligne de A peut se faire en multipliant A à gauche par une matrice convenable.

Démontrer qu'on peut effectuer une opération analogue avec les vecteurs colonnes par une multiplication à droite.

2) On suppose que la première ligne de A comporte au moins un élément non nul. Montrer qu'il existe des matrices P et Q, produits de matrices de la forme $I + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, telles que le produit PAQ soit de la forme

$$PAQ = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{B'} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

(on pourra, dans un premier temps, transformer la matrice A en une matrice qui comporte un élément égal à 1 à l'intersection de la première ligne et de la première colonne).

3) On suppose que A est de rang $r > 0$. Montrer qu'il existe d dans $\mathbb{K}^*$ et des matrices P et Q, produits de matrices de la forme $I + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, telles que

$$PAQ = B = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, d, 0, 0, \ldots, 0)$$

(matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le terme d étant à la place d'indice r sur la diagonale).

Montrer en outre que, si $r < n$, on peut choisir ci-dessus $d = 1$.

Que vaut d lorsque $r = n$?

4) **a)** Pour $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, quelle est la matrice inverse de $I + \lambda E_{i,j}$?

b) Déduire des questions précédentes que toute matrice de $SL_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire comme un produit fini de matrices de la forme $I + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

5) *Dans la suite du problème, on suppose que* $n \geqslant 3$.

Montrer que toute matrice de la forme $I + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ s'exprime comme un *commutateur* de telles matrices, c'est-à-dire

$$I + \lambda E_{i,j} = A^{-1}B^{-1}AB, \text{ noté } [A, B]$$

où A et B sont de la forme $I + \alpha E_{p,q}$ avec $p \neq q$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Partie II

On rappelle que $n \geqslant 3$.

Soit ϕ une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant les conditions suivantes :

($*$) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \phi(A \times B) = \phi(A) . \phi(B)$

($**$) Pour toute matrice diagonale D, $\phi(D)$ est le produit des éléments diagonaux de D.

1) Étant donnés deux indices distincts i et j compris entre 1 et n, on pose, pour tout scalaire $t \in \mathbb{K}$,

$$f(t) = \phi(I + t.E_{i,j}) .$$

Prouver que $f(t) = 1$ pour tout t appartenant à $\mathbb{K}$.

2) Montrer que $\phi(X) = \det X$ pour toute matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie III

On suppose toujours que $n \geq 3$.
Soit ψ une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans un ensemble E telle que :

$$\psi(X \times Y \times Z) = \psi(X \times Z \times Y) \quad \text{pour tout triplet de matrices } (X, Y, Z) .$$

1) Démontrer que, pour toute matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et toute matrice U de $SL_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\psi(X \times U) = \psi(X) = \psi(U \times X) .$$

2) Pour tout $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, on définit par blocs

$$X_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

où I_r est la matrice identité d'ordre r.

a) Montrer que, pour A et B, matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de même rang $r < n$, on a $\psi(A) = \psi(B)$.

b) Montrer qu'il existe une matrice Y de rang r dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$Y \times X_r = X_{r-1} \quad \text{et} \quad X_r \times Y = Y$$

(on pourra raisonner sur les endomorphismes associés).

c) En déduire que ψ prend la même valeur sur toutes les matrices de rang strictement inférieur à n.

3) En conclure que, pour toutes matrices X et Y de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a l'implication :

$$\det X = \det Y \Rightarrow \psi(X) = \psi(Y) .$$

⋆ ⋆
⋆