# Polynômes trigonométriques

## Partie I

**1)** Il vient immédiatement :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta}\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-im\theta}\mathrm{d}\theta = c_m.}$$

En effet

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-im\theta}\mathrm{d}\theta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)\theta}\mathrm{d}\theta = c_m \text{ puisque les termes pour } k \neq m \text{ sont nuls.}$$

**2)** D'après le résultat précédent, la famille $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est entièrement déterminée par la donnée de $f$ :

$$\boxed{\text{La famille } (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \text{ à support fini telle que : } \forall\theta\in\mathbb{R} \quad f(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta} \text{ est unique.}}$$

J'ai, grâce à une réindexation : $\forall\theta\in\mathbb{R} \quad \overline{f(\theta)} = \sum_{k=-N}^{N} \overline{c_k} e^{-ik\theta} = \sum_{k=-N}^{N} \overline{c_{-k}} e^{ik\theta}$.

Donc, d'après l'unicité établie précédemment, $f$ est à valeurs réelles si et seulement si :

$$\forall k \in \{-N,\dots,N\} \quad \overline{c_{-k}} = c_k \;;$$

autrement dit :

$$\boxed{f \text{ est à valeurs réelles si et seulement si : } \forall k\in\{0,\dots,N\} \quad c_{-k} = \overline{c_k}.}$$

**3)** Il est clair que le polynôme $P$ défini par : $P(X) = \sum_{k=-N}^{N} c_k X^{k+N}$ convient ; par ailleurs, si deux polynômes $P$ et $Q$ conviennent, alors $P - Q$ admet une infinité de racines (tous les complexes de module 1) ; c'est donc le polynôme nul, d'où l'unicité de $P$. Par ailleurs, en réindexant, j'obtiens $P(X) = \sum_{j=0}^{2N} c_{j-N} X^j$, donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Il existe un unique polynôme } P \text{ dans } \mathbb{C}[X] \text{ tel que : } \forall\theta\in\mathbb{R} \quad f(\theta) = e^{-iN\theta} P\left(e^{i\theta}\right) \;; \\ \text{ses coefficients sont donnés par : } \forall j\in\mathbb{N} \quad u_j = c_{j-N} \;;\text{ lorsque } c_N \neq 0,\ P \text{ est de degré } 2N.\end{array}}$$

**4)** $f$ étant à valeurs réelles, j'ai d'après **2)** et **3)** : $P(0) = c_{-N} = \overline{c_N} \neq 0$ par hypothèse ; en outre :

$$\forall j\in\{0,\dots,2N\} \quad u_{2N-j} = c_{N-j} = \overline{c_{j-N}} = \overline{u_j}.$$

Finalement,

$$\boxed{P(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall j\in\{0,\dots,2N\} \quad u_{2N-j} = \overline{u_j}.}$$

Il en résulte que, pour $z$ dans $\mathbb{C}^*$, en réindexant :

$$P(1/\overline{z}) = \frac{1}{\overline{z}^{2N}} \sum_{j=0}^{2N} u_j \overline{z}^{2N-j} = \frac{1}{\overline{z}^{2N}} \sum_{j=0}^{2N} u_{2N-j} \overline{z}^{j} = \frac{1}{\overline{z}^{2N}} \overline{P(z)} \quad \text{d'où} \quad P(z) = z^{2N} \cdot \overline{P(1/\overline{z})}.$$

Alors, si $z_0$ est une racine de $P$ de multiplicité $m$, je dispose d'un polynôme $Q$ de $\mathbb{C}[X]$ tel que :

$$P(X) = (X - z_0)^m Q(X) \quad \text{et} \quad Q(z_0) \neq 0 \;;$$

en outre, $z_0$ est non nul puisque $P(0) \neq 0$ et il vient :

$$\forall z\in\mathbb{C}^* \quad P(z) = z^{2N} \cdot \overline{\left(\frac{1}{\overline{z}} - z_0\right)^m Q(1/\overline{z})} = (-\overline{z_0})^m \left(z - \frac{1}{\overline{z_0}}\right)^m z^{2N-m} \overline{Q(1/\overline{z})}.$$

Or $Q$ est un polynôme de degré $2N - m$, il en résulte que $R : z \mapsto (-\overline{z_0})^m z^{2N-m} \overline{Q(1/\overline{z})}$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et j'ai :

$$P(X) = \left(X - \frac{1}{\overline{z_0}}\right)^m R(X) \text{ , avec } R\left(\frac{1}{\overline{z_0}}\right) \neq 0 \text{ puisque } Q(z_0) \neq 0.$$

Par conséquent, $1/\overline{z_0}$ est racine d'ordre $m$ de $P$ :

$$\boxed{\text{Si } z_0 \text{ est une racine de } P \text{ de multiplicité } m, \text{ alors } 1/\overline{z_0} \text{ est aussi une racine de } P \text{ de multiplicité } m.}$$

**5) a)** $e^{i\theta_0}$ étant une racine de $P$ de multiplicité $m$, je dispose d'un polynôme $Q$ de $\mathbb{C}[X]$ tel que

$$P(X) = \left(X - e^{i\theta_0}\right)^m Q(X) \quad \text{et} \quad Q\left(e^{i\theta_0}\right) \neq 0\ ;$$

d'où

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = e^{iN\theta}\left(e^{i\theta} - e^{i\theta_0}\right)^m Q\left(e^{i\theta}\right) = e^{iN\theta}\left[e^{i(\theta+\theta_0)/2} \cdot 2i \sin\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)\right]^m Q\left(e^{i\theta}\right).$$

Soit, en posant : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad g(\theta) = e^{iN\theta}\left[e^{i(\theta+\theta_0)/2} \cdot 2i\right]^m Q\left(e^{i\theta}\right)$ :

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = \left[\sin\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)\right]^m g(\theta) \text{ , où } g \text{ est une fonction continue telle que : } g(\theta_0) \neq 0.}$$

**b)** D'après **a)**, au voisinage de $\theta_0$, $f(\theta)$ est équivalent à $\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)^m g(\theta_0)$. Si $f$ est à valeurs réelles, $g(\theta_0)$ est nécessairement un réel, puisque c'est la limite en $\theta_0$ de $\theta \mapsto f(\theta) \Big/ \left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)^m$. De plus, si $m$ était impair, $f$ changerait de signe en $\theta_0$ :

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}^+\text{, alors } m \text{ est pair.}}$$

**6) a)** J'appelle $c$ le coefficient dominant de $P$, $e^{i\theta_j}$, $1 \leq j \leq p$, les racines de module 1 de $P$ ($p = 0$ s'il n'y en a pas !) et $z_k$, $1 \leq k \leq q$, les racines de module strictement inférieur à 1 de $P$ ($q = 0$ s'il n'y en a pas !!). D'après **5)b)**, l'ordre de multiplicité de $e^{i\theta_j}$ est pair, je le note $2\alpha_j$. D'après **4)**, les racines de module strictement supérieur à 1 de $P$ sont les $1/\overline{z_k}$, je note $\beta_k$ l'ordre de multiplicité commun (toujours d'après **4)**) à $z_k$ et $1/\overline{z_k}$. J'ai ainsi obtenu toutes les racines de $P$, donc d'après le théorème de d'Alembert :

$$\boxed{P \text{ se factorise comme indiqué dans l'énoncé.}}$$

En outre $P$ est de degré $2N$, d'où :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{p} \alpha_j + \sum_{k=1}^{q} \beta_k = N.}$$

**b)** Je vérifie bien que, pour $\theta$ réel et $z_k$ complexe non nul :

$$\begin{cases} \left(e^{i\theta} - e^{i\theta_j}\right)^2 = \left(e^{i\theta} - e^{i\theta_j}\right) e^{i\theta} e^{i\theta_j}\left(e^{-i\theta_j} - e^{-i\theta}\right) = -e^{i\theta}e^{i\theta_j}\left|e^{i\theta} - e^{i\theta_j}\right|^2 \\ \left(e^{i\theta} - z_k\right)\left(e^{i\theta} - 1/\overline{z_k}\right) = \left(e^{i\theta} - z_k\right)\dfrac{e^{i\theta}}{\overline{z_k}}\left(\overline{z_k} - e^{-i\theta}\right) = -\dfrac{e^{i\theta}}{\overline{z_k}}\left|e^{i\theta} - z_k\right|^2 \end{cases}$$

Il en résulte, avec les notations du **a)** :

$$A\left(e^{i\theta}\right) = (-1)^{\sum \alpha_j} \cdot e^{i\theta \sum \alpha_j} \cdot e^{i \sum \alpha_j \theta_j} \cdot \prod_{j=1}^{p} \left|e^{i\theta} - e^{i\theta_j}\right|^{2\alpha_j}$$

et

$$B\left(e^{i\theta}\right) = (-1)^{\sum \beta_k} \cdot e^{i\theta \sum \beta_k} \cdot \prod_{k=1}^{q} \frac{1}{\overline{z_k}} \cdot \prod_{k=1}^{q} \left|e^{i\theta} - z_k\right|^{2\beta_k}.$$

Comme $\sum \alpha_j + \sum \beta_k = N$, j'obtiens

$$f(\theta) = \gamma \cdot \prod_{j=1}^{p} \left|e^{i\theta} - e^{i\theta_j}\right|^{2\alpha_j} \cdot \prod_{k=1}^{q} \left|e^{i\theta} - z_k\right|^{2\beta_k} ,$$

$\gamma$ étant *a priori* une constante complexe ; mais nécessairement $\gamma$ est dans $\mathbb{R}^{+*}$, puisque $f$ est non nulle et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Finalement, en posant :

$$Q(X) = \sqrt{\gamma} \cdot \prod_{j=1}^{p} \left(X - e^{i\theta_j}\right)^{\alpha_j} \cdot \prod_{k=1}^{q} (X - z_k)^{\beta_k} ,$$

$$\boxed{Q \text{ est un polynôme de } \mathbb{C}[X]\text{, de degré } N\text{, tel que : } \forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = \left|Q\left(e^{i\theta}\right)\right|^2.}$$

## Partie II

**1)** Quelques récurrences immédiates, agrémentées de la relation :

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta \ ,$$

montrent que :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour } n \text{ dans } \mathbb{N}^*,\ T_n \text{ est un polynôme de degré } n, \text{ de coefficient dominant } 2^{n-1} (T_0 = 1\ !) \\ \text{et : } \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.\end{array}}$$

Comme la fonction cos induit une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$, j'ai :

$$\|T_n\| = \sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = \sup_{\theta\in[0,\pi]} |T_n(\cos\theta)| = \sup_{\theta\in[0,\pi]} |\cos n\theta| = 1,$$

d'où :

$$\boxed{\left\| \frac{1}{2^{n-1}} T_n \right\| = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

**2) a)** Par hypothèse, j'ai :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} \quad -\frac{1}{2^{n-1}} < P(x_k) < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}.$$

Donc, pour $k$ pair, $Q(x_k) > 0$ et, pour $k$ impair, $Q(x_k) < 0$ ; j'en déduis, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, que :

$$\boxed{Q = \frac{1}{2^{n-1}} T_n - P \text{ s'annule sur chaque intervalle } ]x_{k+1}, x_k[\ ,\ 0 \le k \le n-1.}$$

$Q$ est la différence de deux polynômes de degré $n$ unitaires, donc $Q$ est de degré au plus $n-1$ ; or, d'après ce qui précède, $Q$ admet au moins $n$ racines distinctes, donc $Q = 0$, c'est-à-dire que $P = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$, ce qui est absurde, puisque $\left\| \frac{1}{2^{n-1}} T_n \right\| = \frac{1}{2^{n-1}}$ alors que $\|P\| < \frac{1}{2^{n-1}}$. En conclusion :

$$\boxed{\text{Il ne peut exister } P \in \mathbb{R}[X], \text{ de degré } n, \text{ unitaire, tel que : } \|P\| < \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

**b)** Soit $P \in U_n$. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors d'après **a)**, $\|P\| \ge \frac{1}{2^{n-1}}$. Dans le cas général, $P$ s'écrit $A + iB$, avec $A$ et $B$ dans $\mathbb{R}[X]$ ; $P$ étant unitaire de degré $n$, $A$ est également unitaire de degré $n$ (et $B$ de degré strictement inférieur à $n$) ; ainsi, d'après le premier cas, $\|A\| \ge \frac{1}{2^{n-1}}$. Or :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad |P(x)| = \sqrt{A(x)^2 + B(x)^2} \ge |A(x)|.$$

J'en déduis que $\|P\| \ge \|A\|$, d'où finalement :

$$\boxed{\text{Si } P \in U_n, \text{ alors } \|P\| \ge \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

**3) a)** Pour $(a_0, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N) \in \mathbb{R}^{2N+1}$, j'ai :

$$\begin{aligned}\forall \theta \in \mathbb{R} \quad a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) &= a_0 + \sum_{k=1}^{N} \left( a_k \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2} + b_k \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} \right) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{N} \left[ \left( \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} \right) e^{ik\theta} + \left( \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i} \right) e^{-ik\theta} \right]\end{aligned}$$

<u>*Analyse*</u> : d'après l'unicité vue au **I-2)**, si $(a_0, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N)$ vérifie :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \ ,$$

j'ai nécessairement, en comparant les coefficients de $e^{ik\theta}$ , pour $0 \le k \le N$ :

$$a_0 = c_0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, N\} \quad a_k = 2\,\mathrm{Re}\, c_k \quad \text{et} \quad b_k = -2\,\mathrm{Im}\, c_k.$$

*Synthèse* : la famille $(a_0, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N)$ définie par les relations ci-dessus est bien dans $\mathbb{R}^{2N+1}$ ; elle vérifie par construction :

$$a_0 = c_0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, N\} \quad \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} = c_k.$$

En outre, $f$ étant à valeurs réelles, j'ai d'après **I-2)** :

$$\forall k \in \{1, \dots, N\} \quad c_{-k} = \overline{c_k} = \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i}.$$

Finalement, d'après le calcul ci-dessus :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) = f(\theta) \ ;$$

ainsi cette famille convient et c'est la seule possible d'après l'analyse :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Il existe une unique famille } (a_0, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N) \text{ dans } \mathbb{R}^{2N+1} \text{ telle que :} \\ \forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).\end{array}}$$

**b)** Par hypothèse :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\theta} = \left|Q\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 = \left(\sum_{j=0}^{N} \lambda_j \cdot e^{ij\theta}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} \overline{\lambda_j} \cdot e^{-ij\theta}\right).$$

En identifiant les coefficients de $e^{iN\theta}$ , puis de $e^{i0\theta}$ (cf. l'unicité vue au **I-2)**), j'obtiens :

$$c_N = \lambda_N \cdot \overline{\lambda_0} \quad \text{et} \quad c_0 = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \cdot \overline{\lambda_j}.$$

Il en résulte, d'après **a)** :

$$\boxed{a_N - ib_N = 2 \cdot \overline{\lambda_0} \cdot \lambda_N \quad \text{et} \quad a_0 = \sum_{j=0}^{N} |\lambda_j|^2.}$$

Il en découle :

$$\sqrt{a_N^2 + b_N^2} = |a_N - ib_N| = 2 \cdot |\lambda_0| \cdot |\lambda_N| \leq |\lambda_0|^2 + |\lambda_N|^2 \ \ (\text{car } (|\lambda_0| - |\lambda_N|)^2 \geq 0) \ ;$$

D'après la valeur de $a_0$ calculée ci-dessus, j'en déduis : $\sqrt{a_N^2 + b_N^2} \leq a_0$, d'où

$$\boxed{a_N^2 + b_N^2 \leq a_0^2.}$$

**4) a)** Dans le cas particulier considéré, la question précédente donne :

$$\boxed{a_N = 2 \ ; \ b_N = 0 \ ; \ a_0 = 2 + \sum_{j=1}^{N-1} |\lambda_j|^2.}$$

**b)** Par définition de $M(Q)$, j'ai : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = \left|Q\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 \leq [M(Q)]^2$ ;

d'où en intégrant : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta \leq 2\pi [M(Q)]^2$, or $a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ ; en conclusion :

$$\boxed{[M(Q)]^2 \geq a_0.}$$

**c)** D'après la majoration vue au début du **b)**, $g : \theta \mapsto [M(Q)]^2 - f(\theta)$ est bien un polynôme trigonométrique à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ ; en outre, d'après l'unicité vue au **II-3)a)**, la famille de $\mathbb{R}^{2N+1}$ associée à $g$ est $\left([M(Q)]^2 - a_0, -a_1, -b_1, \dots, -a_N, -b_N\right)$ et le résultat du **II-3)b)** donne

$$(-a_N)^2 + (-b_N)^2 \leq \left([M(Q)]^2 - a_0\right)^2.$$

Or $a_N = 2$ , $b_N = 0$ et $[M(Q)]^2 \geq a_0$ ; d'où : $[M(Q)]^2 - a_0 \geq 2$ ; comme $a_0 \geq 2$ (d'après **a)**) et $M(Q) \geq 0$, j'en déduis : $M(Q) \geq 2$.

En outre, si $M(Q)$ est égal à 2, j'ai $a_0 \leq 2$ ; de **a)**, je déduis alors que

$$\forall j \in \{1, \dots, N-1\} \quad \lambda_j = 0.$$

Réciproquement, si : $\forall j \in \{1, \ldots, N-1\} \quad \lambda_j = 0$, alors $Q(X) = X^N + 1$ et

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \left|Q\left(e^{i\theta}\right)\right| = 2\left|\cos N\theta\right| \ ;$$

d'où, par définition de $M(Q)$, $M(Q) = 2$. En conclusion :

$$\boxed{M(Q) \geq 2 \text{ , avec égalité si et seulement si : } \forall j \in \{1, \ldots, N-1\} \quad \lambda_j = 0.}$$

**5) a)** Soit $A(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ (où $\alpha_n = 1$ par hypothèse). J'ai :

$$Q(X) = 2^n X^n A\left[\frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right)\right] = 2^n \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{2^k} X^{n-k}\left(X^2+1\right)^k.$$

$Q$ apparaît donc bien comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ ; en outre, $X^{n-k}\left(X^2+1\right)^k$ étant de degré $n+k$, $Q$ est de degré $2n$ et son coefficient dominant est : $2^n \dfrac{\alpha_n}{2^n} = 1$. Enfin, la somme ci-dessus comporte un seul terme constant, obtenu pour $k = n$, valant également : $2^n \dfrac{\alpha_n}{2^n} = 1$. En conclusion :

$$\boxed{Q \text{ est un polynôme de } \mathbb{C}[X] \text{, de degré } 2n \text{ ; ses coefficients dominant et constant valent 1.}}$$

**b)** $M(Q) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left|Q\left(e^{i\theta}\right)\right| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left|2^n A(\cos\theta)\right| = 2^n \|A\|$. Ainsi :

$$\boxed{M(Q) = 2.}$$

Or, d'après **a)**, $Q(X) = \sum_{j=0}^{2n} \lambda_j X^j$ avec $\lambda_0 = \lambda_{2n} = 1$. Il en résulte, d'après **4)c)**, que

$$\boxed{Q(X) = X^{2n} + 1.}$$

**c)** J'en déduis, par définition de $Q$ :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad A(\cos\theta) = \frac{1}{2^n e^{in\theta}} Q\left(e^{i\theta}\right) = \frac{1}{2^n}\left(e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\theta.$$

Par conséquent, les polynômes $A$ et $\dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$ coïncident sur $[-1, 1]$, donc en une infinité de points : ils sont égaux (leur différence est un polynôme admettant une infinité de racines).

$$\boxed{A = \frac{1}{2^{n-1}} T_n.}$$

Nous venons donc de prouver, en rassemblant les résultats de **II-1)** et **II-2)b)**, que :

$$\boxed{\min\left\{\|P\| \,,\ P \in U_n\right\} = \frac{1}{2^{n-1}} \text{ et } \frac{1}{2^{n-1}} T_n \text{ est l'unique polynôme de } U_n \text{ où ce minimum est atteint.}}$$