D.L. 1

Polynômes trigonométriques

Notations et objectifs

Dans tout le problème, on confondra polynôme et fonction polynomiale.
Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\|P\| = \sup\{|P(x)|,\ x \in [-1,1]\}$ et $M(P) = \sup\{|P(e^{i\theta})|,\ \theta \in \mathbb{R}\}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, U_n désigne l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré n et unitaires (*i.e.* dont le coefficient dominant vaut 1).
On appelle *polynôme trigonométrique* toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle qu'il existe N dans $\mathbb{N}$ et une famille de complexes $(c_{-N}, c_{-N+1}, \ldots, c_N)$ dans $\mathbb{C}^{2N+1}$ vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\theta}.$$

On définit alors la famille $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *à support fini* (*i.e.* comportant un nombre fini de termes non nuls) en posant : $\forall k \in \mathbb{Z}\setminus[-N,N] \quad c_k = 0$ et l'on écrit :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta}.$$

Le problème comporte deux parties.
Dans la première, on caractérise les polynômes trigonométriques à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Dans la seconde, on détermine $\min\{\|P\|,\ P \in U_n\}$ et l'unique polynôme réalisant ce minimum.

Partie I

Soient f un polynôme trigonométrique, $N \in \mathbb{N}$ et $(c_{-N}, c_{-N+1}, \ldots, c_N) \in \mathbb{C}^{2N+1}$ tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\theta}.$$

1) Calculer, pour $m \in \mathbb{Z}$, les intégrales : $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta}\mathrm{d}\theta$ et $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-im\theta}\mathrm{d}\theta$.

2) En déduire l'unicité de la famille $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ à support fini telle que : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta}$.

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que f soit à valeurs réelles est :

$$\forall k \in \{0, \ldots, N\} \quad c_{-k} = \overline{c_k}.$$

3) Montrer qu'il existe un unique polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = e^{-iN\theta} \cdot P(e^{i\theta})$.

Calculer les coefficients $u_0, u_1, \ldots$ de P (tels que $P = \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} u_j X^j$) en fonction des c_k.

Quel est le degré de P lorsque $c_N \neq 0$?

Pour la fin du **I**, *on suppose f à valeurs réelles et $c_N \neq 0$.*

4) Montrer que $P(0) \neq 0$ et vérifier que $\forall j \in \{0, \ldots, 2N\} \quad u_{2N-j} = \overline{u_j}$.

En déduire que, si z_0 est une racine de P de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$, alors $1/\overline{z_0}$ est aussi une racine de P de multiplicité m *(on pourra exprimer, pour $z \in \mathbb{C}^*$, $P(1/\overline{z})$ en fonction de $P(z)$).*

5) Soit θ_0 réel tel que $e^{i\theta_0}$ soit une racine de P de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$.

a) Établir : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = \left[\sin\left(\dfrac{\theta - \theta_0}{2}\right)\right]^m \cdot g(\theta)$, où g est une fonction continue telle que $g(\theta_0) \neq 0$.

b) Montrer que, si f est de plus à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors m est pair.

Toujours pour la fin du **I**, *on suppose f à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et $c_N \neq 0$.*

6) **a)** Montrer que l'on peut factoriser P sous la forme : $P(X) = c \cdot A(X) \cdot B(X)$, où :

- c est une constante complexe non nulle ;
- $A(X) = \displaystyle\prod_{j=1}^{p} \left(X - e^{i\theta_j}\right)^{2\alpha_j}$, avec $p \in \mathbb{N}$ ($A = 1$ si $p = 0$), les θ_j étant dans $\mathbb{R}$, deux à deux non congrus modulo 2π et les α_j dans $\mathbb{N}^*$;
- $B(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{q} \left[(X - z_k)\left(X - 1/\overline{z_k}\right)\right]^{\beta_k}$, avec $q \in \mathbb{N}$ ($B = 1$ si $q = 0$), les z_k étant dans $\mathbb{C}$, deux à deux distincts, non nuls, de module strictement inférieur à 1 et les β_k dans $\mathbb{N}^*$.

Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \alpha_j + \sum_{k=1}^{q} \beta_k$?

b) En déduire qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$, de degré N, tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = \left|Q\left(e^{i\theta}\right)\right|^2$.
On pourra remarquer que :

$$\left(e^{i\theta} - e^{i\theta_j}\right)^2 = -e^{i\theta} \cdot e^{i\theta_j} \cdot \left|e^{i\theta} - e^{i\theta_j}\right|^2 \quad \text{et} \quad \left(e^{i\theta} - z_k\right)\left(e^{i\theta} - 1/\overline{z_k}\right) = -\frac{e^{i\theta}}{\overline{z_k}} \cdot \left|e^{i\theta} - z_k\right|^2.$$

Partie II

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_{n+1} = 2X \cdot T_n - T_{n-1}$$

(polynômes de Tchebychev de première espèce).

1) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré n ; préciser son coefficient dominant.
Établir : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.
En déduire la valeur de $\left\|\dfrac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n\right\|$, pour $n \in \mathbb{N}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $x_k = \cos(k\pi/n)$; on notera que :

$$-1 = x_n < x_{n-1} < \cdots < x_0 = 1.$$

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n, unitaire et tel que : $\|P\| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Montrer que le polynôme $Q = \dfrac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n - P$ s'annule sur chaque intervalle $]x_{k+1}, x_k[$, $0 \leq k \leq n-1$.
En déduire une contradiction.

b) Montrer que, si $P \in U_n$, alors $\|P\| \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ *(on traitera d'abord le cas où P est à coefficients réels, puis le cas général en écrivant $P = A + iB$, avec A et B dans $\mathbb{R}[X]$).*

3) Soient f un polynôme trigonométrique à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, N dans $\mathbb{N}$ et $(c_{-N}, c_{-N+1}, \dots, c_N)$ dans $\mathbb{C}^{2N+1}$ tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\theta}\ , \text{ avec } c_N \neq 0.$$

a) Montrer qu'il existe une unique famille $(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_N, b_N)$ dans $\mathbb{R}^{2N+1}$ telle que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

b) D'après **I-6)b)**, il existe un polynôme Q de degré N dans $\mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = \left| Q\left(e^{i\theta}\right) \right|^2.$$

Soit $Q(X) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j X^j$ un tel polynôme. Montrer que : $a_N - ib_N = 2 \cdot \overline{\lambda_0} \cdot \lambda_N$ et $a_0 = \sum_{j=0}^{N} |\lambda_j|^2$.

En déduire que : $a_N^2 + b_N^2 \leq a_0^2$.

4) <u>*Étude d'un cas particulier*</u>

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(X) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j X^j$, avec $\underline{\lambda_0 = \lambda_N = 1}$.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_N, b_N) \in \mathbb{R}^{2N+1}$ tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad f(\theta) = \left| Q\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 = a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

a) Que deviennent les relations établies au **II-3)b)** ?

b) Montrer, en utilisant une intégration, que : $[M(Q)]^2 \geq a_0$.

c) En réutilisant **II-3)b)**, pour la fonction $g : \theta \mapsto [M(Q)]^2 - f(\theta)$, montrer que :

$$M(Q) \geq 2 \text{ , avec égalité si et seulement si : } \forall j \in \{1, \ldots, N-1\} \quad \lambda_j = 0.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in U_n$ tels que $\|A\| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

a) Montrer que l'on définit bien un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ en posant :

$$Q(X) = 2^n \cdot X^n \cdot A\left[\frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right)\right]$$

(**attention !** Il ne s'agit pas du produit de A par $\frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right)$ mais de la **composition** opérée en remplaçant Y par $\frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right)$ dans l'expression $A(Y)$).

Quels sont le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant de Q ?

b) Calculer $M(Q)$. En déduire que $Q(X) = X^{2n} + 1$.

c) Montrer que $A = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n$. Conclusion ?