Classe préparatoire PSI
Programme de mathématiques

Table des matières

Le programme de mathématiques de PSI, dans le prolongement de ceux de première année, s'inscrit entre deux continuités : en amont avec les programmes rénovés du lycée, en aval avec les enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études universitaires. Il est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant, de scientifique, et aussi pour leur permettre de se former tout au long de la vie.

Objectifs de formation

La formation mathématique en classe préparatoire scientifique vise deux objectifs :
- l'acquisition d'un solide bagage de connaissances et de méthodes permettant notamment de passer de la perception intuitive de certaines notions à leur appropriation, afin de pouvoir les utiliser à un niveau supérieur, en mathématiques et dans les autres disciplines. Ce degré d'appropriation suppose la maîtrise du cours, c'est-à-dire des définitions, énoncés et démonstrations des théorèmes figurant au programme ;
- le développement de compétences utiles aux scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs ou enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour les résoudre, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.

Pour répondre à cette double exigence, et en continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires définissent un corpus de connaissances et de capacités, et explicitent six grandes compétences qu'une activité mathématique permet de développer :
- **s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer à l'écrit et à l'oral** : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

S'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemple, la géométrie apparaît comme un champ d'utilisation des concepts développés en algèbre linéaire et euclidienne ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et illustrent certains résultats d'analyse.
Percevoir la globalité et la complexité du monde réel exige le croisement des regards disciplinaires. Ainsi, les mathématiques interagissent avec des champs de connaissances partagés par d'autres disciplines. Aussi le programme valorise-t-il l'interprétation des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure de grandeurs, incertitudes...).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

L'étude de chaque domaine du programme (analyse, algèbre, probabilités) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, et d'établir des liens avec les autres disciplines.
Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces euclidiens, les fonctions d'une ou plusieurs variables réelles, les fonctions vectorielles.

Le programme d'algèbre comprend deux volets. Le premier prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en première année et aboutit à la théorie de la réduction dont il développe quelques applications. Le second, consacré aux espaces préhilbertiens réels et à l'algèbre euclidienne, met l'accent sur les relations entre les points de vue vectoriel, matriciel et géométrique, notamment à travers une étude spécifique aux dimensions deux et trois, et à l'énoncé du théorème spectral.
Le vocabulaire sur les structures algébriques est introduit au fur et à mesure des besoins.

Le programme d'analyse est introduit par un chapitre de topologie des espaces vectoriels normés. Celui-ci s'attache à développer et illustrer les notions générales dans le cadre de la dimension finie avant d'aborder celui des espaces fonctionnels. L'introduction des normes de la convergence uniforme, en moyenne ou en moyenne quadratique pose le cadre topologique de l'étude des suites et séries de fonctions, qui aboutit aux théorèmes classiques de régularité et d'interversion. Cette étude bénéficie de l'introduction de nouveaux outils relatifs aux séries numériques, permettant de compléter l'approche qui en a été faite en première année.
Le chapitre sur les séries entières permet de construire des fonctions de variable complexe et de fournir un outil pour la résolution d'équations différentielles linéaires.
La généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ des résultats d'analyse réelle étudiés en première année fournit, avec une étude modeste des arcs paramétrés, une nouvelle occasion de relier les registres analytique et géométrique.
L'étude de l'intégration, entamée en première année dans le cadre des fonctions continues sur un segment, se poursuit dans celui des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque. L'intégrale généralisée est un intermédiaire à l'introduction de la notion de fonction intégrable, qui permet d'énoncer les théorèmes classiques sur l'intégration des suites et séries de fonctions et sur les intégrales à paramètre.
Le chapitre relatif au calcul différentiel à plusieurs variables est limité au cas des fonctions numériques de deux ou trois variables réelles. Il fournit des méthodes et des outils opérationnels pour résoudre des problèmes pouvant être issus d'autres disciplines scientifiques (recherche d'extremums, équations aux dérivées partielles). Il comporte un paragraphe présentant les premières notions de géométrie différentielle et favorise ainsi les interprétations et visualisations géométriques.
L'étude des équations et des systèmes différentiels est limitée au cas linéaire, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. L'utilisation dans ce cadre du théorème de Cauchy permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes d'origine analytique. Le cas particulier où les coefficients sont constants permet de mettre en œuvre des techniques de réduction matricielle.

L'enseignement des probabilités présente brièvement le formalisme de Kolmogorov, qui sera repris dans le cursus ultérieur des étudiants. Son objectif majeur est l'étude des variables aléatoires discrètes, en prolongement des variables finies étudiées en première année, ce qui permet d'élargir aux processus stochastiques à temps discret le champ des situations réelles se prêtant à une modélisation probabiliste.
La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli, déjà évoquée dans le cursus antérieur des étudiants. L'inégalité qui la sous-tend précise la vitesse de convergence de cette approximation et valide l'interprétation de la variance comme indicateur de dispersion.
Ce chapitre a vocation à interagir avec le reste du programme.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.
Le programme est décliné en chapitres. Chaque chapitre comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes.

En particulier, l'ordre de présentation des différents chapitres ne doit pas être interprété comme un modèle de progression. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

– celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents chapitres ;
– celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
– celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les autres disciplines scientifiques.

Les liens avec les disciplines scientifiques et technologiques sont identifiés par le symbole $\leftrightarrows$ PC pour la physique et la chimie, $\leftrightarrows$ SI pour les sciences industrielles de l'ingénieur et $\leftrightarrows$ I pour l'informatique.

Usage de la liberté pédagogique

Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :

– pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances et des capacités est en effet d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Quel que soit le contexte (cours, travaux dirigés), la pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants ;
– didacticien, il choisit le contexte favorable à l'acquisition des connaissances et au développement des compétences. La mise en perspective d'une problématique avec l'histoire des sociétés, des sciences et des techniques, mais aussi des questions d'actualité ou des débats d'idées, permet de motiver son enseignement.

Programme

Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :
- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *étudier de nouveaux concepts : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, sous-espaces stables, polynômes de matrices, trace, formes linéaires, hyperplans ;*
- *passer du point de vue géométrique au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques et préconise l'illustration des notions et des résultats par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit et somme d'espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie. Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels ; sous-espaces supplémentaires.	
Base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel F de E ; base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à une décomposition en somme directe $E = \bigoplus E_i$.	Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base.
Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors : $$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe. Si $E_1, \dots, E_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et si $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$ pour tout i, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $u_{\vert E_i} = u_i$ pour tout i.	
b) Matrices et endomorphismes	
Polynôme d'une matrice carrée, d'un endomorphisme. Polynôme annulateur.	Applications au calcul de l'inverse et des puissances.
Matrices définies par blocs, opérations.	
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.	Les étudiants doivent savoir traduire matriciellement la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interpréter en termes d'endomorphismes une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
Si f et g commutent alors le noyau et l'image de f sont stables par g.	
Matrices semblables. Interprétation en termes d'endomorphisme.	La notion de matrices équivalentes est hors programme.
Trace d'une matrice carrée. Linéarité, trace d'une transposée, d'un produit. Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Déterminants	
Exemples de déterminants.	Les étudiants doivent savoir calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, et connaître l'expression d'un déterminant de Vandermonde. ⇆ I : calcul d'un déterminant.
d) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie	
Formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.	L'étude de la dualité est hors programme.
Hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.	Les étudiants doivent savoir caractériser un hyperplan comme noyau d'une forme linéaire non nulle, supplémentaire d'une droite, sous-espace de dimension $n-1$.
Équations d'un hyperplan dans une base.	Deux équations linéaires définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.
Exemples des droites et des plans en dimensions 2 et 3.	

B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées permet d'approfondir les notions étudiées en première année. Elle sera appliquée à l'étude des isométries et des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien. Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux points de vue suivants :

- *l'aspect géométrique (sous-espaces propres, sous-espaces stables) ;*
- *l'aspect algébrique (critères de réduction reposant sur les polynômes annulateurs).*

L'application des résultats de la réduction à la recherche des solutions d'une récurrence linéaire à coefficients constants crée un nouveau pont entre l'algèbre et l'analyse et anticipe l'étude des équations différentielles linéaires dont la résolution repose sur des outils similaires.
L'étude des classes de similitude est hors programme ainsi que la notion de polynôme minimal.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Éléments propres	
Droite stable par un endomorphisme.	
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.	Les étudiants doivent savoir que si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme. ⇆ SI : matrice d'inductance : inductance cyclique et inductance homopolaire.
Les sous-espaces propres sont en somme directe.	
Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u.
Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.	
Expressions du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé.	
Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre.	
Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit sur un sous-espace stable.	

Contenus	Capacités & Commentaires

b) Diagonalisation

Contenus	Capacités & Commentaires
Un endomorphisme est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une matrice est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps de base $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Interprétation matricielle de ces résultats.
Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.	
Application à la résolution des récurrences linéaires à coefficients constants.	Les étudiants doivent savoir traduire matriciellement une relation de récurrence linéaire.

c) Diagonalisation et polynômes annulateurs

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème de Cayley-Hamilton.	Démonstration non exigible.
Un endomorphisme de E est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.	Démonstration non exigible. Interprétation matricielle de ce résultat. Le théorème de décomposition des noyaux est hors programme.
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$ pour polynôme annulateur. L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.	

d) Trigonalisation

Contenus	Capacités & Commentaires
Un endomorphisme est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure. Une matrice est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps $\mathbb{K}$. En particulier, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	Démonstration non exigible. Interprétation matricielle de ce résultat. La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication. ⇆ I : calcul de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux puissances itérées consécutives.

Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

L'objectif de ce chapitre est triple :

– *généraliser les outils de géométrie vectorielle euclidienne du plan et de l'espace à des dimensions quelconques ;*
– *étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, notamment dans le cas des dimensions* 2 *et* 3 *en insistant sur les représentations géométriques ;*
– *aborder la réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles.*

A - Espaces préhilbertiens réels

L'objectif majeur est le théorème de projection orthogonale et l'existence de la meilleure approximation quadratique. On s'appuie sur des exemples de géométrie du plan et de l'espace pour illustrer les différentes notions.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit scalaire et norme associée	
Espace préhilbertien réel, espace euclidien.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$. Les étudiants doivent savoir manipuler les identités remarquables sur les normes (développement de $\\|u \pm v\\|^2$, identité de polarisation).
Exemples de référence : produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, produits scalaires définis par une intégrale sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.	Application géométrique dans le cas du produit scalaire usuel du plan ou de l'espace, équations de plans et de droites.
Inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas d'égalité.	
Norme associée au produit scalaire.	Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.
b) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Famille orthogonale, orthonormale (ou orthonormée). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore.	
Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	⇆ I : calcul d'une base orthonormée de polynômes pour différents exemples de produit scalaire. ⇆ I : décomposition QR d'une matrice inversible.
c) Bases orthonormales d'un espace euclidien	
Existence de bases orthonormales. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale.	
Expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale.	Expression $X^{\mathrm{T}}Y$ du produit scalaire de deux vecteurs x et y de coordonnées X et Y dans une base orthonormale. Les étudiants doivent savoir calculer au moyen du produit scalaire les coefficients de la matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale.
d) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace V de dimension finie.	Notation $V^{\perp}$.
Projection orthogonale p_V sur un sous-espace V de dimension finie.	Les étudiants doivent savoir déterminer $p_V(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormale de V ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_V(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de V. ⇆I : programmation de ces méthodes.
Inégalité de Bessel : pour tout $x \in E$, $\\|p_V(x)\\| \leqslant \\|x\\|$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
$p_V(x)$ est l'unique vecteur y_0 de V tel que $$\|x-y_0\| = \min_{y\in V}\|x-y\|$$	La distance de x à V, notée $d(x,V)$, est égale à ce minimum. Application géométrique à des calculs de distances dans le plan ou l'espace.
e) Formes linéaires sur un espace euclidien	
Représentation d'une forme linéaire à l'aide d'un produit scalaire.	
Vecteur normal à un hyperplan.	Les étudiants doivent savoir calculer la distance d'un vecteur à un hyperplan, la distance d'un vecteur à une droite.

B - Isométries et endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

Les objectifs de cette partie sont les suivants :
- *établir les liens entre les registres géométrique et matriciel en dimension quelconque ;*
- *décrire les isométries et les matrices orthogonales en dimensions deux et trois ;*
- *énoncer les formes géométrique et matricielle du théorème spectral.*

La notion d'adjoint est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.	Autre dénomination : automorphisme orthogonal.
Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormale.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
b) Matrices orthogonales	
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle.	Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormale.
Caractérisation par l'une des relations $MM^{\mathrm{T}} = I_n$ ou $M^{\mathrm{T}}M = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormale.	
Groupe orthogonal d'ordre n.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
c) Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3	
Orientation. Bases orthonormales directes.	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base orthonormale directe : produit mixte.	Notations $[\vec{u},\vec{v}]$, $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$. Interprétation géométrique comme aire ou volume.
Produit vectoriel. Calcul dans une base orthonormale directe.	$\leftrightarrows$ PC : moment cinétique, force de Laplace.
Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien orienté de dimension 3.	
d) Isométries vectorielles d'un plan euclidien	
Détermination des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.	Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté. Produit de deux matrices de rotation. Composée de deux rotations d'un plan euclidien. Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	Écriture complexe d'une rotation.
e) Isométries d'un espace euclidien de dimension 3	
Réduction en base orthonormale d'une isométrie vectorielle d'un espace euclidien de dimension 3. Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, axe et mesure de l'angle d'une rotation.	Interprétation matricielle.
f) Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles	
Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E, alors u est symétrique si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique.	
Théorème spectral : tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres. Interprétation matricielle : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1}$.	Démonstration non exigible.

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Ce chapitre vise les objectifs suivants :

- *généraliser au cas des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel ;*
- *préparer l'introduction de la norme de la convergence uniforme, afin de fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.*

L'aspect géométrique de certains concepts topologiques gagne à être illustré par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Normes	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe ; espace vectoriel normé. Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère.	Normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$.
Partie convexe. Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	Convexité des boules.
b) Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie	
Convergence d'une suite. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	Exemples de suites de matrices.
La convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas du choix de la norme.	Résultat admis, qui pourra être illustré sur les normes usuelles définies sur $\mathbb{K}^p$.

Contenus	Capacités & Commentaires
L'étude de la convergence d'une suite se ramène à celle de ses coordonnées dans une base.	
c) Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie	
L'étude topologique d'un espace vectoriel normé de dimension finie se ramène à celle de $\mathbb{K}^p$ muni d'une norme.	Résultat admis.
Point intérieur à une partie. Partie ouverte.	Une boule ouverte est un ouvert.
Point adhérent à une partie. Partie fermée.	Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère sont des fermés.
Intérieur, adhérence, frontière.	Ces notions sont illustrées par des figures. Seules les définitions sont au programme.
e) Limite et continuité en un point.	
Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition. Caractérisation séquentielle de la limite. Équivalence entre l'existence d'une limite et celle des limites des coordonnées de la fonction dans une base de l'espace d'arrivée. Opérations algébriques sur les limites, composition. Continuité en un point. Lien avec la continuité des coordonnées.	
f) Continuité sur une partie	
Opérations algébriques, composition.	Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée est bornée et atteint ses bornes.	Démonstration non exigible.
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.	
Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est lipschitzienne.	La notion de norme subordonnée est hors programme.
Continuité des applications multilinéaires et polynomiales sur $\mathbb{K}^n$.	Exemple du déterminant.

Suites et séries

A - Séries numériques

Cette partie a pour objectif de consolider et d'élargir les acquis de première année sur les séries, notamment la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes et des séries de fonctions.
La semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Compléments sur les séries à valeurs réelles	
Théorème de comparaison entre une série et une intégrale : si f est une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, positive et décroissante, alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.	
Formule de Stirling : équivalent de $n!$.	Démonstration non exigible.
Règle de d'Alembert.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.

b) Produit de Cauchy de deux séries

Le produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nombres complexes est la série $\sum w_n$ avec : $$w_n = \sum_{p+q=n} u_q v_p.$$	
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors la série $\sum w_n$ l'est aussi et $$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\Big).$$	Démonstration non exigible.

B - Suites et séries de fonctions

L'objectif de ce chapitre est de définir différents modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions et d'étudier la stabilité des propriétés de ces fonctions par passage à la limite. En prolongement du chapitre sur les espaces vectoriels normés de dimension finie, un lien est établi avec l'utilisation de la norme de la convergence uniforme.
Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires

a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	
Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.	Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, les étudiants doivent savoir utiliser une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante, c'est-à-dire telle que pour tout n, $\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$.
La convergence normale entraîne la convergence uniforme.	

b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si (f_n) converge uniformément vers f sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Théorème de la double limite : soit (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers f sur I et a une extrémité de I (éventuellement infinie) ; si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a, alors la suite (ℓ_n) admet une limite ℓ, f admet une limite en a et cette limite est égale à ℓ.	Démonstration hors programme.
Interversion limite-intégrale : si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors $$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions : si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite (f_n') converge uniformément sur I vers h, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = h$.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.	Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathscr{C}^k$ de la limite sous l'hypothèse de convergence simple des $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur tout segment de I.

c) Régularité de la somme d'une série de fonctions

Continuité de la somme : si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors sa somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Théorème de la double limite : soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et a une extrémité de I (éventuellement infinie) ; si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I, de somme S, et si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a alors la série $\sum \ell_n$ converge, la fonction S admet une limite en a et : $$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$	Démonstration hors programme.
Intégration terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$; si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ alors la série des intégrales est convergente et on a : $$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	
Dérivation terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ; si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I. Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathscr{C}^k$ de la somme.

C - Séries entières

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :
- *étudier la convergence d'une série entière de variable complexe et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*
- *étudier les propriétés de sa somme en se limitant à la continuité dans le cas d'une variable complexe ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

La théorie des séries entières sera appliquée au cas des séries génératrices dans le chapitre dédié aux variables aléatoires discrètes et à la recherche de solutions d'équations différentielles linéaires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rayon de convergence	
Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'ensemble des réels positifs ρ tels que la suite $(a_n \rho^n)$ est bornée.	Pour $\lvert z\rvert < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
Disque ouvert de convergence, intervalle de convergence.	
Si R_a est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, et R_b celui de $\sum b_n z^n$, alors : si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$; si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.	
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.	
Utilisation de la règle de d'Alembert.	
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.	
b) Régularité de la somme	
Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.	On admet la continuité de la somme d'une série entière d'une variable complexe sur le disque ouvert de convergence. L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ou du disque de convergence n'est pas un objectif du programme.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.	
Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.	
Expression des coefficients d'une série entière au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.	
c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle	
Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.	
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.	
Unicité du développement en série entière.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Développements des fonctions usuelles.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$

Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

L'objectif de ce chapitre est double :

- *généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ la notion de dérivée d'une fonction numérique, en vue notamment de préparer le chapitre sur les équations différentielles ;*
- *formaliser des notions géométriques (arc paramétré, tangente) et cinématiques (vitesse, accélération) rencontrées dans d'autres disciplines scientifiques.*

Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Dérivabilité et opérations sur les fonctions dérivables	
Dérivabilité en un point. Dérivabilité sur un intervalle.	Taux d'accroissement et développement limité d'ordre un. Interprétations géométrique et cinématique. ⇆ PC, SI : vecteur vitesse.
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivée de $L \circ f$, $B(f,g)$, $f \circ \varphi$ où f et g sont dérivables et à valeurs vectorielles, L est linéaire, B est bilinéaire, φ est dérivable et à valeurs réelles.	Application au produit scalaire et au déterminant dans une base de $\mathbb{R}^2$ de deux fonctions vectorielles.
b) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Fonction de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^\infty$.	⇆ PC, SI : vecteur accélération. Brève extension des résultats du paragraphe précédent.
c) Arcs paramétrés	
Arc paramétré de classe $\mathscr{C}^k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Point régulier, tangente en un point régulier.	
Construction d'arcs plans.	Les étudiants doivent savoir utiliser des développements limités pour déterminer l'allure d'un arc au voisinage d'un point et des développements asymptotiques pour étudier ses branches infinies. ⇆ I : tracé d'arcs paramétrés. L'étude des arcs définis par une équation polaire est hors programme.
Longueur d'un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$.	Les notions d'abscisse curviligne et de paramétrage admissible sont hors programme.

Intégration

L'objectif de ce chapitre est multiple :

- *Étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées*
- *Définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable*
- *Compléter le chapitre dédié aux suites et aux séries de fonctions par le théorème de la convergence dominée et le théorème d'intégration terme à terme*
- *Étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.*

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions continues par morceaux	
Fonctions continues par morceaux sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.	Brève extension des résultats sur les fonctions continues étudiés en première année. Aucune construction n'est exigible.
b) Intégrales généralisées sur $[a,+\infty[$	
Si f est une application à valeurs complexes continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.	Intégrale divergente.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.	
c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$.	Notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Intégrales de référence : $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\int_0^1 t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$.	Les étudiants doivent connaître la nature de $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ selon le signe de α.
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	
Changement de variable : si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ est continue par morceaux alors $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ est convergente si et seulement si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et, si tel est le cas, elles sont égales.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Notation $[fg]_a^b$.

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.

La convergence absolue implique la convergence et dans ce cas, la valeur absolue (ou le module) de l'intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue (ou du module).

Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, la démonstration utilise les parties positive et négative de la fonction.

Une fonction continue par morceaux sur un intervalle I est dite intégrable sur I si son intégrale sur I est absolument convergente.

Notations $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_I f$.

Pour f et g fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$:

- si $|f| \leqslant |g|$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a,+\infty[$.
- si $f(x) \underset{x\to\infty}{=} O\big(g(x)\big)$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a,+\infty[$.
- si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur $[a,+\infty[$.

Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Si f est continue et intégrable sur I, alors $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$ implique $f = 0$.

Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux intégrables sur I.

Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur I.

Structure préhilbertienne de l'espace des fonctions continues de carré intégrable sur I et à valeurs réelles.

Le produit de deux fonctions de carré intégrable est intégrable. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

e) Suites et séries de fonctions intégrables

Théorème de convergence dominée :
si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur I convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Théorème d'intégration terme à terme :
si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration hors programme.
L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$.

Contenus	Capacités & Commentaires
f) Intégrales à paramètre	
Théorème de continuité : si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$, telle que : – pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J ; – pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ; – il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$, on ait $\lvert f(x,t)\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $x \mapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I.	Démonstration non exigible. Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de I.
Théorème de dérivation : si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$, telle que : – pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ; – pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ; – pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J ; – il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$, on ait $\left\lvert \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et on a sur I : $$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	Démonstration non exigible. Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de I. $\leftrightarrows$ PC : transformées de Fourier. $\leftrightarrows$ SI : transformée de Laplace, théorème de la valeur initiale, théorème de la valeur finale.
Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.	

Probabilités

Les chapitres de probabilités permettent de développer les compétences suivantes :

- *modéliser des situations aléatoires par le choix d'un espace probabilisé ou de variables aléatoires adéquats ;*
- *maîtriser un formalisme spécifique aux probabilités.*

A- Espaces probabilisés

Cette partie a pour objectif la mise en place du cadre général de la théorie des probabilités permettant d'aborder l'étude de processus stochastiques à temps discret. Cette mise en place se veut minimale. En particulier :

- *la notion de tribu ne doit donner lieu à aucun développement théorique autre que sa définition ;*
- *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Ensembles finis ou dénombrables. Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, d'un produit cartésien de deux ensembles dénombrables.	Un ensemble fini ou dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$. Toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme.

b) Espace probabilisé

Si Ω est un ensemble, on appelle *tribu* sur Ω une partie $\mathscr{A}$ de l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que :

i. $\Omega \in \mathscr{A}$,

ii. pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathscr{A}$,

iii. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, la réunion $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathscr{A}$.

L'ensemble Ω est l'univers ; il n'est en général pas précisé. Les éléments de $\mathscr{A}$ sont les événements. Les étudiants doivent savoir expliciter un événement à partir d'autres événements en utilisant la réunion, l'intersection et le complémentaire. On fait le parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste.

Si Ω est un ensemble et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω, on appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathscr{A})$ une application $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que :

i. $P(\Omega) = 1$,

ii. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements incompatibles,

$$P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ où $\mathscr{A}$ est une tribu et P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Propriétés :

- $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$.
- Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_n \subset A_{n+1}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big).$$

- Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_{n+1} \subset A_n$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big).$$

- Sous additivité : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors :

$$P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

c) Conditionnement et indépendance

Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Notation $P_B(A) = P(A \mid B)$. L'application P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
Ce paragraphe étend rapidement les concepts et résultats vus dans le cadre des univers finis.

Formule des probabilités composées.
Système complet dénombrable d'événements.
Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors la série $\sum P(B\cap A_n)$ converge et

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \mid A_n)\, P(A_n)$$

On adopte la convention $P(B \mid A_n)\ P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.
La formule reste valable dans le cas d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.

Formule de Bayes.

Contenus	Capacités & Commentaires
Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P(A \mid B) = P(A)$.
Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.	L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance mutuelle.

B - Variables aléatoires discrètes

Les objectifs de cette partie sont les suivants :
- *étendre la notion de variable aléatoire finie à des variables dont l'image est un ensemble dénombrable*
- *fournir des outils permettant, sur des exemples simples, l'étude de processus stochastiques à temps discret*
- *exposer deux résultats asymptotiques : l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson et la loi faible des grands nombres*
- *introduire les fonctions génératrices et utiliser les propriétés des séries entières.*

La construction d'espaces probabilisés modélisant une suite d'expériences aléatoires est hors programme, on admet l'existence de tels espaces. Les différents types de convergence probabiliste (presque sûre, en probabilité, en loi, en moyenne) sont hors programme.
Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application définie sur Ω dont l'image est finie ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathscr{A}$.	Pour tout $U \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ est un événement. Notations $(X \in U)$, $\{X \in U\}$.
Loi d'une variable aléatoire discrète.	
Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Croissance, limites en $-\infty$ et en $+\infty$.	$F_X(x) = P(X \leqslant x)$. L'étude des propriétés de continuité des fonctions de répartition n'est pas au programme.
Si X prend ses valeurs dans $\{\, x_n \quad n \geqslant 0 \,\}$, les x_n étant distincts, et si $(p_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs vérifiant $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que $P(X = x_n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.	Démonstration hors programme.
Couple de variables aléatoires discrètes. Loi conjointe et lois marginales Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$. Deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont dites indépendantes si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$	Extension aux variables discrètes des notions étudiées en première année sur les variables finies.
Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toute partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$, on a $$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$	Démonstration hors programme.
Variables mutuellement indépendantes.	Extension sans démonstration aux variables discrètes des notions et des résultats vus en première année.
Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors pour toutes fonctions f et g, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Suite de variables aléatoires indépendantes (deux à deux ou mutuellement).	La démonstration de l'existence d'un espace probabilisé portant une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de lois discrètes donnés est hors programme. Application à la modélisation d'un jeu de pile ou face infini par une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes.

b) Espérance et variance

La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n\,;\, n \geqslant 0\}$ est dite d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente ; si tel est le cas, on appelle espérance de X, noté $\mathrm{E}(X)$, le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.	On admet que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération. $\leftrightarrows$ PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.
Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.	
Théorème du transfert : si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\Sigma P(X = x_n)\, f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a : $$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)\, f(x_n).$$	Démonstration hors programme.
Linéarité de l'espérance. Positivité, croissance de l'espérance.	Démonstration non exigible.
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie. Si X^2 est d'espérance finie, la variance de X est le réel $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\big((X - \mathrm{E}(X))^2\big) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$. Écart type $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$. Pour a et b réels et X variable aléatoire réelle, relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.	Démonstration hors programme.
Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.	Brève extension des résultats obtenus dans le cadre d'un univers fini.
Variance d'une somme finie de variables aléatoires ; cas de variables deux à deux indépendantes.	
Covariance, coefficient de corrélation. Encadrement $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.	Notations : $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

c) Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)\, t^n.$$	La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.
Le rayon de convergence est au moins égal à 1.	
La variable aléatoire X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, si tel est le cas, $\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$.	Démonstration non exigible.

Contenus	Capacités & Commentaires
La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.	Démonstration non exigible. Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\mathrm{V}(X)$ en fonction de $G_X'(1)$ et de $G_X''(1)$ en cas d'existence.
Série génératrice d'une somme de deux v.a. indépendantes.	
d) Lois usuelles	
Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p : la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Série génératrice, espérance et variance. Caractérisation comme loi sans mémoire : $$P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k).$$	
Loi de Poisson de paramètre λ. Série génératrice, espérance et variance. Somme de deux variables indépendantes suivant une loi de Poisson.	Notation $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. $\leftrightarrows$ PC : compteur Geiger.
e) Résultats asymptotiques	
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$ et si $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k\,!}.$$	Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares. $\leftrightarrows$ I : simulation de cette approximation. La notion de convergence en loi est hors programme.
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathrm{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, $$P\left(\left\|\frac{1}{n}S_n - m\right\| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$	Estimation : pour tout $\varepsilon > 0$, $$P\left(\left\|\frac{1}{n}S_n - m\right\| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$ $\leftrightarrows$ I : simulation d'une suite de tirages.

Calcul différentiel

Ce chapitre est consacré à l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Il est axé sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie : résolution d'équations aux dérivées partielles, problèmes d'extremums, courbes, surfaces. On se limite en pratique au cas $p \leqslant 3$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$	
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur U. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.	Notations $\partial_i f(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U admet en tout point a de U un développement limité d'ordre 1. Différentielle de f en a.	Démonstration non exigible. Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U est continue sur U. Elle est définie comme l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$: $(h_1,\dots,h_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(a)$. Notation $\mathrm{d}f(a)\cdot h$.
b) Règle de la chaîne	
Dérivée de $t \mapsto f\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)$. Application au calcul des dérivées partielles de $(u,v) \mapsto f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$. Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.	Interprétation géométrique : dérivée le long d'un arc $\mathscr{C}^1$. Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.
c) Gradient	
Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Relation $\forall h \in \mathbb{R}^p$, $\mathrm{d}f(a)\cdot h = (\nabla f(a) \mid h)$.	Le gradient est défini par ses coordonnées. Notation $\nabla f(a)$. ⇆ PC : champ électrostatique, loi de Fourier.
d) Applications géométriques	
Courbe du plan définie par une équation $f(x,y)=0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$. Point régulier. Équation de la tangente en un point régulier.	On admet l'existence d'un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$.
En un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau $f(x,y)=\lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.	⇆ PC : lignes équipotentielles et lignes de champ. ⇆ I : tracé de lignes de niveau.
Surface définie par une équation $f(x,y,z)=0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$. Point régulier. Courbes tracées sur une surface.	Cas particulier des courbes coordonnées d'une surface d'équation $z=g(x,y)$.
Plan tangent à une surface en un point régulier défini comme le plan orthogonal au gradient et passant par le point.	Tangentes aux courbes régulières de classe $\mathscr{C}^1$ tracées sur la surface.
e) Dérivées partielles d'ordre deux	
Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction de deux ou trois variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.	
Fonction de classe $\mathscr{C}^2$.	Notations $\partial^2_{i,j} f$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème de Schwarz. Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.	Démonstration hors programme. Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires. ⇆ PC : équation du transport, équation de la diffusion thermique, équation de propagation.

f) Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Extremum local, global. Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.	
Recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$.	⇆ PC et SI : mécanique et électricité.

Équations différentielles linéaires

L'étude des équations différentielles linéaires scalaires d'ordres un et deux, commencée en première année, se poursuit par celle des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 *et des équations scalaires à coefficients non constants, en mettant l'accent sur les équations d'ordre deux. On s'attache à développer à la fois les aspects théorique et pratique :*

- *la forme des solutions ;*
- *le théorème de Cauchy linéaire ;*
- *le lien entre les équations scalaires et les systèmes différentiels d'ordre un ;*
- *la résolution explicite.*

Ce chapitre favorise les interactions avec les autres disciplines scientifiques.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Contenus	Capacités & commentaires

a) Systèmes différentiels

Équation de la forme $X' = A(t)X + B(t)$ où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont continues. Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration hors programme. ⇆ I : Méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée d'un problème de Cauchy.
Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et l'espace vectoriel des solutions de $X' = A(t)X$. Système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$.	Dimension de l'espace vectoriel des solutions.
Résolution lorsque A est une matrice diagonalisable.	Exemples de résolution dans le cas où A est trigonalisable. ⇆ PC : comportement asymptotique des solutions en fonction du spectre de A.

b) Équations différentielles linéaires scalaires

Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$. Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène. Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Les étudiants doivent savoir écrire cette équation sous la forme d'un système différentiel $X' = A(t)X + B(t)$. La recherche d'une solution particulière de l'équation complète doit comporter des indications.

Contenus	Capacités & Commentaires
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène, dimension. Cas des équations à coefficients constants.	Exemples d'utilisation de développements en série entière pour la recherche de solutions. On relie les résultats obtenus en première année à l'aide de l'équation caractéristique à la réduction de la matrice du système différentiel associé. Les étudiants doivent savoir trouver une solution particulière de l'équation complète pour un second membre de la forme $A\cos(\omega t)$ ou $A\sin(\omega t)$. La méthode de la variation des constantes est hors programme.