

PSI* – maths – démonstrations fondamentales

1) Compléments d'algèbre linéaire

- Prolongement linéaire d'applications linéaires
- Isomorphismes classiques :
 - * pour u dans $\mathcal{L}(E)$, u définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans $\text{Im } u$
 - * deux supplémentaires d'un même sous-espace sont isomorphes
- Notion d'hyperplan ; les hyperplans sont les noyaux des formes linéaires non nulles
- Déterminant de Vandermonde

2) Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

- Si $u(x) = \lambda.x$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(u)(x) = P(\lambda).x$
- Si $\lambda \in \text{Sp } u$ et $P(u) = 0$, alors λ est racine de P
- Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe
- Polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit sur un sous-espace stable
- Si F est stable par u et u diagonalisable, alors l'endomorphisme induit est diagonalisable
- La dimension d'un sous-espace propre est au plus la multiplicité de la valeur propre ; cas de la diagonalisabilité

3) Compléments sur les séries numériques

- Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste
- Théorème de comparaison entre une série et une intégrale

4) Espaces vectoriels normés

- Caractérisation séquentielle de la limite

5) Suites et séries de fonctions

- La convergence normale entraîne la convergence uniforme
- Transmission de la continuité en cas de convergence uniforme

6) Séries entières

- Lemme d'Abel, définition du rayon de convergence
- Expression des coefficients d'une série entière à l'aide des dérivées successives en 0 de la fonction somme

7) Intégration sur un intervalle quelconque

- Nature des intégrales de Riemann
- La convergence absolue implique la convergence
- Espaces L^2 : la somme de deux fonctions de carré intégrable est de carré intégrable, le produit de deux fonctions de carré intégrable est intégrable

8) Espaces préhilbertiens réels et euclidiens

- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité
- Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
- Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie
- Distance à un sous-espace de dimension finie, inégalité de Bessel

9) Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles, arcs paramétrés

- Dérivée de $L \circ f$ et $B(f, g)$ où L est linéaire et B bilinéaire

10) Équations différentielles linéaires

- Le théorème de Cauchy étant admis, structure de l'ensemble des solutions
- Résolution d'un système à coefficients constant $X' = AX$ par réduction de la matrice A

11) Probabilités – Variables aléatoires discrètes

- Continuité croissante, sous-additivité
- Si X est d'espérance finie et à valeurs dans \mathbb{N} , alors $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$
- Inégalités de Markov, de Bienaymé-Thebychev ; loi faible des grands nombres
- Série génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes

12) Calcul différentiel

- Dérivée de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$, application au calcul des dérivées partielles de $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$
- Si une fonction \mathcal{C}^1 sur un ouvert admet un extremum en un point dudit ouvert, alors ce point est un point critique