

# PSI\* – maths – points hors programme mais classiques

## 1) Compléments d’algèbre linéaire

- Noyaux et images itérés, cas d’un endomorphisme nilpotent
- Combinaisons linéaires, familles libres, génératrices, bases en dimension infinie
- Structure de  $\mathbb{K}$ -algèbre
- Polynômes d’interpolation de Lagrange
- Comatrice, formules de Cramer

## 2) Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

- Polynôme minimal
- Sous-espaces caractéristiques, pratique de la réduction de Jordan à l’aide des  $\text{Ker}(u - \lambda \cdot \text{Id}_E)^k$
- Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable
- Diagonalisation simultanée de deux endomorphismes diagonalisables qui commutent
- Diagonalisation d’un endomorphisme qui commute avec un autre ayant  $n$  valeurs propres distinctes en dimension  $n$

## 3) Compléments sur les séries numériques

- Les quatre sommes associées à une série de Riemann : somme de la série alternée, des termes de rang pair, des termes de rang impair
- Intégrales de Wallis :  $\int_0^{\pi/2} \cos^n t dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
- Comparaison série-intégrale : en cas de divergence, les sommes partielles  $\sum_{n=n_0}^p f(n)$  et les “intégrales partielles”  $\int_{n_0}^p f$  sont des infiniments grands équivalents
- Séries de Bertrand
- Sommutation des relations de comparaison
- Théorème de Cesàro
- Suite de Cauchy, transformation d’Abel

## 4) Espaces vectoriels normés

- Distance d’un point à une partie non vide
- Normes équivalentes
- Caractérisation de la continuité des applications linéaires en dimension quelconque
- Compacité
- Équivalence des normes en dimension finie
- Séries de vecteurs

## 5) Suites et séries de fonctions

- Fonction  $\zeta$  de Riemann

## 6) Séries entières

- Développement en série entière de l'inverse d'une somme de série entière
- Théorème d'Abel

## 7) Intégration sur un intervalle quelconque

- Intégrale de Dirichlet :  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$  ; Intégrale de Gauss :  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$
- Fonction  $\Gamma$  d'Euler
- Intégrales de Bertrand
- Théorème de division
- Théorème de Fubini

## 8) Espaces préhilbertiens réels et euclidiens

- Matrice de Gram d'un système de vecteurs dans un espace euclidien
- Endomorphismes et matrices carrées symétriques positifs, caractérisation à l'aide des valeurs propres
- Racine carrée d'une matrice symétrique positive
- Expression intrinsèque d'une rotation dans un espace euclidien orienté de dimension 3

## 9) Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles, arcs paramétrés

- Inégalité des accroissements finis
- Classification des points d'un arc paramétré plan : points d'inflexion, points de rebroussement
- Enveloppe d'une famille de droites

## 10) Équations différentielles linéaires

- Wronskien ; méthode de variation des constantes
- Équations d'Euler
- Notion de solution maximale pour une équation non linéaire, théorème de Cauchy
- Équations de Bernoulli

## 11) Probabilités – Variables aléatoires discrètes

- Sommation par paquets, sommes doubles
- Lemme des coalitions
- Loi hypergéométrique, formule de Vandermonde

## 12) Calcul différentiel

- Théorème d'Euler