Suites et séries numériques de PCSI

I - Généralités sur les suites numériques

On appellera *suite réelle* tout élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1) Convergence – Unicité de la limite

Étant donné un réel ℓ, on dit que la suite réelle (u_n) *admet ℓ pour limite* si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Lorsqu'un tel nombre ℓ existe, on dit que la suite (u_n) est *convergente*, ou encore qu'*elle admet une limite finie.*
Le nombre ℓ est alors unique, appelé *la limite de la suite* (u_n), noté $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
Dans le cas contraire, on dit que la suite (u_n) est *divergente.*
On dit que (u_n) *admet pour limite* $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si

$$\forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A \quad (\text{resp. } u_n \leq -A).$$

Attention ! Dans le cas où (u_n) admet pour limite $\pm\infty$, (u_n) est divergente.

2) Composition de limites

Soient f une fonction numérique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que u_n soit dans l'ensemble de définition de f à partir d'un certain rang.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a et si f admet une limite ℓ en a, alors la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a et si f est continue en a, alors la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

3) Convergence et relation d'ordre

a) Passage à la limite dans une inégalité

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles **convergentes** telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$, alors $\lim(u_n) \leq \lim(v_n)$.

Attention ! Avant d'appliquer cette propriété, bien justifier l'**existence** des limites (voir aussi le paragraphe suivant).

Attention ! Les inégalités strictes ne se transmettent pas en général (cf. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{n} > 0$).

b) Théorème d'encadrement

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :

- à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent vers une même limite** ℓ.

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

Attention ! Ce n'est pas le cas sans l'hypothèse de la **limite commune** à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (cf. $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$).

NB : Ce résultat permet d'**établir la convergence** de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, contrairement au “passage à la limite”.

4) Convergence des suites monotones

Théorème : toute suite réelle croissante majorée converge ;
toute suite réelle décroissante minorée converge.

Plus précisément, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante, alors
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sup\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\} \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$$
(soit elle est majorée, auquel cas elle converge, soit elle a pour limite $+\infty$).

De même, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante, alors
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \inf\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\} \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$$
(soit elle est minorée, auquel cas elle converge, soit elle a pour limite $-\infty$).

5) Suites adjacentes

Définition : deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si et seulement si l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$.

Théorème : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, alors $\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2\quad a_p\le b_q$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.

NB : un énoncé équivalent est le *théorème des segment emboîtés* : si $\big([a_n,b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de segments de $\mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]$ est un singleton.

Remarque pratique : pour montrer que deux suites sont adjacentes, sachant que l'une est croissante et l'autre décroissante, penser éventuellement à montrer d'abord que les deux convergent (par exemple à l'aide du § **1**), puis que leurs limites sont égales (en utilisant les définitions des suites). On en **déduit** que la différence converge vers 0 !

6) Suites extraites

Définition : on appelle *suite extraite* (ou *sous-suite*) d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $\big(a_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, où φ est une application **strictement croissante** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (en particulier $\lim\limits_{+\infty}\varphi=+\infty$).

Exemples : $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$), alors toute suite extraite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la même limite.

Exercice classique : si $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent **une même limite** ℓ, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite ℓ (mais cf. $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}\ldots$).

II - Quelques idées pour l'étude de suites récurrentes

1) Généralités

On se donne une application $f : D\to\mathbb{R}$ et on s'intéresse aux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de u_0, dans l'ensemble de définition D de f, et la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=f(u_n)$.

a) Définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On peut chercher une partie F de D, stable par f, telle que $u_0\in F$; il est alors clair par récurrence que la suite est définie et a tous ses termes dans F.

b) Représentation graphique

Ayant tracé le graphe Γ de f et la bissectrice Δ du repère (d'équation $y = x$), partant du point (u_0, u_1) de Γ, on trace un segment parallèle à Ox pour rejoindre (u_1, u_1) de Δ, puis un segment parallèle à Oy pour rejoindre (u_1, u_2) de Γ,...

c) Limites possibles

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et f continue en ℓ, nécessairement $f(\ell) = \ell$.

d) Cas où f est croissante

Si $f : F \to F$ est croissante sur F, on montre par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone :
si $u_0 < u_1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ; si $u_0 > u_1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

NB : la position de u_0 par rapport à u_1 peut-être fournie par l'étude du signe de $f(x) - x$.

e) Cas où f est décroissante

Si $f : F \to F$ est décroissante sur F, alors les deux sous-suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de sens contraires :

- si $u_0 < u_2$, alors $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ décroissante ;
- si $u_0 > u_2$, alors $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ croissante.

En effet, ces deux suites sont des suites récurrentes associées à la fonction $f \circ f$, qui est croissante !

NB : la position de u_0 par rapport à u_2 peut-être fournie par l'étude du signe de $f \circ f(x) - x$.

<u>**Rappel**</u> : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si$(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.

2) Rapidité de convergence

a) Cas d'une fonction contractante

Supposons $f : F \to F$ et $k \in [0,1[$ tels que : $\forall (x,y) \in F^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$ (penser à l'inégalité des accroissements finis ...).
Si f admet pour point fixe ℓ dans F et si $u_0 \in F$, une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \ell| \leq k^n \cdot |u_0 - \ell|$$

(majoration par une suite géométrique). On a convergence très rapide de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ.

b) Convergence quadratique

Supposons $f : F \to F$, $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\ell \in F$ point fixe de f tels que : $\forall x \in F \quad |f(x) - \ell| \leq \lambda \cdot |x - \ell|^2$.
Si $u_0 \in F$ et $p \in \mathbb{N}$, une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \geq p \quad |u_n - \ell| \leq \lambda^{2^{n-p}-1} \cdot |u_p - \ell|^{2^{n-p}}$$

Pourvu que $|\lambda \cdot (u_p - \ell)| < 1$, pour une certaine valeur de p, on a convergence "ultra-rapide" de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ. On a coutume de dire que le nombre de décimales exactes est doublé à chaque itération (si l'on considère u_n comme une valeur approchée de ℓ).

Exemple : pour $a > 0$ donné, soient $F = [\sqrt{a}, +\infty[$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$; on vérifie que $\sqrt{a}$ est point fixe de f et que

$$\forall x \in F \quad \left|f(x) - \sqrt{a}\right| = \frac{1}{2x}\left(x - \sqrt{a}\right)^2 \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(x - \sqrt{a}\right)^2$$

Pour $a = 2$ et $u_0 = 2$, on trouve :
$u_1 \approx \underline{1}.500000000000000000000000000000000000000000000000$
$u_2 \approx \underline{1.41}66666666666666666666666666666666666666666666667$
$u_3 \approx \underline{1.41421}5686274509803921568627450980392156862745098 0$
$u_4 \approx \underline{1.41421356237}4689910626295578890134910116559622115 7$
$u_5 \approx \underline{1.414213562373095048801 68}96235025302436149819257762$
$u_6 \approx \underline{1.41421356237309504880168872420969807856967187537}72$
tandis que :
$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769\ldots$

c) Obtention d'équivalents à l'aide du théorème de Cesàro

On suppose ici F de la forme $[0,b]$ $(b>0)$ et $f : F \to F$ telle que

$$f(x) = x - a.x^p + o(x^p) \quad \text{où} \quad a>0,\ p>1$$

Alors, pour $u_0>0$, suffisamment proche de 0, il est aisé de vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0.
On cherche α tel que $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \dfrac{1}{u_n^\alpha}$ admette une limite réelle non nulle :

$$v_n \sim \frac{u_n^\alpha - u_{n+1}^\alpha}{u_n^{2\alpha}} \quad \text{car } u_{n+1}\sim u_n \text{ puisque } f(x) \underset{0}{\sim} x$$

or

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\alpha &= f(u_n)^\alpha = u_n^\alpha \cdot \left(1 - a.u_n^{p-1} + o\left(u_n^{p-1}\right)\right)^\alpha \\ &= u_n^\alpha \cdot \left(1-\alpha.a.u_n^{p-1} + o\left(u_n^{p-1}\right)\right) \end{aligned}$$

d'où

$$v_n \sim \alpha.a \cdot u_n^{p-1-\alpha}$$

On choisit donc $\alpha = p-1$, alors (v_n) converge vers $(p-1).a$ et, par sommation, le théorème de Cesàro permet de montrer que

$$\frac{1}{u_n^{p-1}} \sim n.(p-1).a$$

d'où

$$u_n \sim \left(\frac{1}{(p-1).a.n}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Exemple : avec $f : x \mapsto \sin x$, $b=1$, $a=\dfrac{1}{6}$, $p=3$, on obtient $u_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$ (convergence lente !)

3) Suites arithmético-géométriques

Ici $F=\mathbb{R}$ et $f : x\mapsto ax+b$ ($a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$et $b\in\mathbb{R}^*$). Les idées précédentes s'appliquent, mais on peut exprimer directement u_n en fonction de n :

- on détermine le point fixe ω de f : $\omega = \dfrac{b}{1-a}$;
- on remarque que la suite $(u_n-\omega)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, de raison a.

Par suite,

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = \omega + a^n.(u_0-\omega)$$

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers ω) si et seulement si ($|a|<1$ ou $u_0=\omega$).

4) Récurrences homographiques

Ici $f : x\mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$; f est une bijection de $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{a}{c}\right\}$; la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas général n'est pas triviale, il est bon de trouver F stable par f... Précisément, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie si et seulement si u_0 n'appartient pas à l'ensemble des valeurs prises par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$v_0 = -\frac{d}{c} \quad \text{et} \quad \forall n \quad v_{n+1} = f^{-1}(v_n) \quad \text{(tant qu'elle est définie !)}$$

Les points fixes de f sont les solutions d'une équation du second degré.
On peut ici aussi exprimer directement u_n en fonction de n :

- si f admet deux points fixes distincts α et β, on vérifie que la suite $\left(\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}\right)$ est **géométrique** ;
- si f admet un unique point fixe α (racine double...), on vérifie que la suite $\left(\dfrac{1}{u_n-\alpha}\right)$ est **arithmétique**.

III - Séries numériques

1) Définitions – Notion de convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On appelle *série de terme général* u_n, notée $\sum u_n$, la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall p\in\mathbb{N}\quad S_p=\sum_{n=0}^{p}u_n.$$

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, S_p est *la somme partielle de rang* p de la série.
Ainsi la série $\sum u_n$ est dite *convergente* si et seulement si la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge, auquel cas sa limite S est *la somme de la série* ; on écrit alors :

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\lim_{p\to\infty}\sum_{n=0}^{p}u_n$$

et l'on appelle *reste de rang* p de la série la différence $R_p=S-S_p$.

La série $\sum u_n$ est dite *divergente* lorsque la suite (S_p) diverge (y compris lorsque $S_p\underset{p\to\infty}{\longrightarrow}\pm\infty$).

<u>*Remarques*</u> :

1) On associe de même à une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$, définie à partir d'un certain rang n_0, la série $\sum\limits_{n\geq n_0}u_n$.

2) Si $\sum u_n$ converge, alors, pour tout p, $\sum\limits_{n\geq p+1}u_n$ converge également (les sommes partielles de ces deux séries diffèrent d'une constante !) et le reste de rang p s'écrit :

$$R_p=S-S_p=\sum_{n=p+1}^{\infty}u_n.$$

3) Pour toute suite (S_p), il existe une unique suite (u_n) telle que (S_p) soit la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$; cette suite (u_n) est définie par :

$$u_0=S_0\quad\text{et}\quad\forall n\geq 1\quad u_n=S_n-S_{n-1}$$

4) Une suite (v_n) converge si et seulement si la série $\sum(v_{n+1}-v_n)$ converge, avec en outre, en cas de convergence,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(v_{n+1}-v_n)=\lim_{n\to\infty}v_n-v_0$$

<u>**Condition nécessaire de convergence**</u> : si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

et donc si (u_n) ne converge pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge (on parle de *divergence grossière* ou *triviale*).

<u>*Dém.*</u> $u_n=S_n-S_{n-1}$ pour $n\geq 1\ldots$

Attention ! Réciproque fausse ! ! (voir $\sum\limits_{n\geq 1}(\ln(n+1)-\ln n)$, $\sum\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$, $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n},\ldots$)

<u>*Exemples*</u> :

1) $\sum(-1)^n$, $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha\in\mathbb{R}^-$ divergent grossièrement.

2) $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et a pour somme 1 (c'est $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$).

Séries de référence

1) *Séries géométriques dans* $\mathbb{C}$: soit $z \in \mathbb{C}$; $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$ et

$$\text{si } |z| < 1 \, , \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \left(\text{avec } R_p = \frac{z^{p+1}}{1-z}\right)$$

(en effet, divergence grossière pour $z = 1$ et, pour $z \neq 1$, $S_p = \dfrac{1 - z^{p+1}}{1-z}$).

2) *Séries de Riemann* : soit $\alpha \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Dém. (par comparaison à une intégrale) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ (si $\alpha \leq 0$, divergence grossière).
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [n, n+1] \quad \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

et, en intégrant sur $[n, n+1]$, qui est d'amplitude 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \, .$$

J'en déduis, pour $p \in \mathbb{N}^*$, par sommation pour n allant de 1 à p et grâce à la relation de Chasles :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_1^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^\alpha}$$

d'où, en réindexant la somme de gauche et en utilisant l'inégalité de gauche avec $p-1$ à la place de p

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \int_1^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq S_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \int_1^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \, .$$

Or la suite (S_p) est une suite croissante de nombres réels : soit elle est majorée, auquel cas elle converge, soit elle a pour limite $+\infty$.

- Pour $\alpha > 1$, j'ai :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad S_p \leq 1 + \int_1^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = 1 + \frac{1 - p^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$

  et donc (S_p) converge.

- Pour $\alpha = 1$, j'ai

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad S_p \geq \int_1^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(p+1) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$$

- Pour $\alpha \in \,]0, 1[$, j'ai

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad S_p \geq \int_1^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{(p+1)^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  ce qui achève la démonstration.

2) Espace vectoriel des séries convergentes

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum (\lambda u_n + v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n \, .$$

Attention ! On peut avoir $\sum (u_n + v_n)$ qui converge alors que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent
(voir par exemple $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ ou $\sum (n - n) \ldots$).

3) Convergence absolue

Définition : $\sum u_n$ est dite *absolument convergente* si et seulement si $\sum |u_n|$ converge.

Théorème : si $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge et l'on a

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \quad \text{(inégalité triangulaire).}$$

Attention ! Réciproque fausse ! ! (Voir l'exemple ci-dessous.)

Définition : $\sum u_n$ est dite *semi-convergente* si et seulement si $\sum u_n$ converge alors que $\sum |u_n|$ diverge.

Exemple : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ (alors que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge).

Dém. Soit pour $p \geq 1$:

$$S_{2p} = \sum_{n=1}^{2p} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k} = \sum_{n=1}^{2p} \frac{1}{n} - 2\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k} = \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{p+k}$$

et je reconnais une somme de Riemann :

$$S_{2p} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1+\frac{k}{p}} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2$$

et comme $S_{2p+1} = S_{2p} + \dfrac{1}{2p+1}$, les deux sous-suites (S_{2p}) et (S_{2p+1}) convergent vers la même limite $\ln 2$, d'où le résultat.

4) Séries à termes réels positifs

a) Condition nécessaire et suffisante de convergence

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telle que $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang n_0.

$\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_p) des sommes partielles est majorée. Sinon $S_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(En effet, $(S_p)_{p\geq n_0}$ est croissante.)

b) Utilisation des relations de comparaison

Propriété 1 : soient (u_n) et (v_n) *à termes réels positifs* à partir d'un certain rang, telles que $u_n = O(v_n)$ (c'est le cas en particulier lorsque $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang)

- $*$ si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge ;
- $*$ si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Propriété 2 : soient (u_n) et (v_n) telles que $u_n \sim v_n$ et *de signe constant* à partir d'un certain rang. $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

NB : deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang ; il suffit de connaître le signe de l'une des deux suites équivalentes.

Attention ! Ces propriétés peuvent être en défaut lorsque u_n et v_n ne sont pas de signe constant.

Comparaison à une série de Riemann

Lorsqu'un équivalent "simple" de u_n n'apparaît pas, mais que u_n tend "suffisamment vite" vers 0, penser à étudier $n^\alpha u_n$ avec α convenablement choisi...

En effet, s'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ soit bornée (en particulier si elle converge vers 0), alors $\sum u_n$ est absolument convergente (en effet $|u_n| = O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$).

Par exemple, pour tout $s > 0$, $\sum e^{-n^s}$ converge.