Polynômes de PCSI et fractions rationnelles de MPSI...

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Anneau $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ *à support fini* (*i.e.* nulles à partir d'un certain rang, dites aussi *presque nulles*).

Définition : on appelle *polynôme* à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ à support fini.

Notations : pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par e_n la suite $(\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ (dont tous les termes sont nuls sauf le n-ième qui vaut 1).

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à support dans $[\![0,p]\!]$ s'écrit $\sum\limits_{n=0}^{p} a_n e_n$, ou encore $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$ (étant entendu qu'il s'agit en fait d'une somme finie).

Produit de deux polynômes :

Si $P = \sum\limits_{i=0}^{p} a_i\, e_i$ et $Q = \sum\limits_{j=0}^{q} b_j\, e_j$, alors $P \times Q$ est le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{p+q} c_k\, e_k$ où :

$$\text{pour } 0 \leq k \leq p+q, \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j \ .$$

Notation définitive : on vérifie qu'en posant $X = e_1$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X^n = e_n.$$

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

La suite $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à support dans $[\![0,p]\!]$ s'écrit alors $P = \sum\limits_{n=0}^{p} a_n X^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$.

Théorème : $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif.

II - Degré, valuation

1) Degré

Définition : soit $P = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$.

Si $P \neq 0$, on appelle *degré* de P l'entier naturel $\max\{n \in \mathbb{N} \ / \ a_n \neq 0\}$, noté $\deg P$.

Soit $p = \deg P$, a_p est appelé le *coefficient dominant* de P.

On dit que P est *normalisé* ou *unitaire* si et seulement si $a_p = 1$.

Si $P = 0$, on pose $\deg P = -\infty$.

Propriétés : soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1) $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$.
2) Si $\deg P \neq \deg Q$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.
3) $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ (addition dans $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$).

Conséquence : un produit de polynômes est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul ($(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau intègre).

Théorème : pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $\mathbb{K}_p[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ \deg P \leq p\} = \mathrm{Vect}\left(1, X, X^2, \ldots, X^p\right)$;
$\mathbb{K}_p[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension $p+1$ de $\mathbb{K}[X]$ (mais n'est pas stable pour la multiplication, dès que $p \geq 1$!).

2) Valuation *(hors programme)*

Définition : soit $P \in \mathbb{K}[X], P = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$.
Si $P \neq 0$, on pose $\operatorname{val} P = \min\{n \in \mathbb{N} \;/\; a_n \neq 0\}$.
Si $P = 0$ on pose $\operatorname{val} P = +\infty$.

III - Division euclidienne

Théorème et définition : soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$.
Il existe un unique couple (Q, R) de $(\mathbb{K}[X])^2$ tel que

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.$$

Q et R sont appelés respectivement *quotient* et *reste* dans la *division euclidienne* de A par B.

Définition : soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$; on dit que A *est divisible par* B, ou que B *divise* A, si et seulement s'il existe Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

Propriété : si $B \neq 0$, A est divisible par B si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul (le quotient est alors dit *quotient exact*, noté A/B).

IV - Fonctions polynomiales et notion de racine

1) Fonction polynomiale

Définition : la *fonction polynomiale* associée à $P = \sum\limits_{n=0}^{p} a_n X^n$ est l'application $\tilde{P} : \begin{array}{l} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{p} a_n\, x^n \end{array}$.

2) Racines d'un polynôme

Définition : soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On dit que α est *racine* (ou *zéro*) de P si et seulement si $\tilde{P}(\alpha) = 0$.

Théorème : soit $P \in \mathbb{K}[X]$; $\tilde{P}(\alpha)$ est le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$;
α est racine de P si et seulement si P est divisible par $X - \alpha$.

Conséquences : 1) Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ n scalaires distincts deux à deux ;
$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont racines de P si et seulement si P est divisible par $\prod\limits_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$.

2) Soient P un élément de $\mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$; si $\deg P \leq n$ et P a au moins $n+1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.
Si P admet une infinité de racines, alors P est le polynôme nul.

$\mathbb{K}$ étant un corps infini, l'application $P \mapsto \tilde{P}$ définit un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de $\mathbb{K}[X]$ sur l'ensemble des fonctions polynomiales ; on *identifie* souvent P et $\tilde{P}$.

3) Algorithme de Horner

Soient $P = \sum\limits_{n=0}^{p} a_n X^n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On pose : $b_p = a_p$ et pour $k = p-1, \ldots, 0$ $\quad b_k = \alpha b_{k+1} + a_k$.

Alors $b_0 = P(\alpha)$, ce qui permet de calculer $P(\alpha)$ au prix de p additions et p multiplications seulement !

De plus, $Q = \sum\limits_{n=0}^{p-1} b_{n+1} X^n$ est le quotient de la division euclidienne de P par $X - \alpha$.

4) Ordre de multiplicité d'une racine

Définition : soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$; on dit que α est une racine de *multiplicité* (ou d'*ordre*) k de P si et seulement si $(X-\alpha)^k$ divise P et $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P ; autrement dit $k = \max\left\{j \in \mathbb{N} \;/\; (X-\alpha)^j \text{ divise } P\right\}$.

5) Dérivation formelle

Définition : on appelle *dérivation* dans $\mathbb{K}[X]$ l'unique endomorphisme D de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$D(1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad D(X^n) = nX^{n-1}.$$

Pour P dans $\mathbb{K}[X]$, $D(P)$ est aussi noté P', et, si $k \in \mathbb{N}$, $D^k(P)$ est noté $P^{(k)}$ (dérivation à l'*ordre* k).

NB : sur $\mathbb{R}$, la fonction polynomiale associée à P' coïncide bien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée à P !

Propriétés : 1) D est surjectif, non injectif ; $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}$ (ensemble des polynômes constants).

2) $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad (PQ)' = P'Q + PQ'$.

3) Formule de Leibniz :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.P^{(n-k)}Q^{(k)}.$$

4) Soit $P = \sum_{n=0}^{p} a_n X^n$, de degré p ; si $k > p$, alors $P^{(k)} = 0$; si $k \leq \deg P$, alors $\deg P^{(k)} = p - k$ et plus précisément :

$$P^{(k)} = \sum_{n=k}^{p} \frac{n!}{(n-k)!} a_n X^{n-k} = \sum_{n=0}^{p-k} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} X^n.$$

Formule de Mac-Laurin pour les polynômes : si P est un polynôme de degré p, alors

$$P = \sum_{n=0}^{p} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n.$$

Formule de Taylor pour les polynômes : soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} (X-\alpha)^n \quad \text{et} \quad P(\alpha + X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} X^n.$$

Conséquence : pour tout p de $\mathbb{N}$ et tout α de $\mathbb{K}$, $\left((X-\alpha)^n\right)_{0 \leq n \leq p}$ est une base de $\mathbb{K}_p[X]$.

6) Caractérisation des racines multiples d'un polynôme

Théorème : soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

1) α est racine d'ordre k de P si et seulement si :

$$\left(\forall j \in \{0, 1, \ldots, k-1\} \quad P^{(j)}(\alpha) = 0\right) \quad \text{et} \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

2) Si α est racine d'ordre k de P, alors, pour $\ell \leq k-1$, α est racine d'ordre $k - \ell$ de $P^{(\ell)}$.

V - Polynômes scindés

1) Définitions

Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit *scindé sur* $\mathbb{K}$ si et seulement si P est constant ou admet des racines dans $\mathbb{K}$ dont la somme des multiplicités vaut $p = \deg P$.
Tout polynôme scindé non constant s'écrit sous la forme

$$P = \lambda \prod_{j=1}^{m} (X - \alpha_j)^{k_j},$$

avec λ dans $\mathbb{C}^*$, les α_j dans $\mathbb{C}$, distincts deux à deux, les k_j dans $\mathbb{N}^*$. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ est *l'ensemble des racines* de P, m est le nombre de racines de P ($\deg P = \sum_{j=1}^{m} k_j$).
On peut aussi écrire

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - r_i).$$

On dit que $(r_1, \dots, r_p)$ est *un système de racines* de P : parmi les r_i, qui ne sont pas nécessairement distincts, on retrouve chacun des α_j, répété autant de fois que son ordre de multiplicité ($\deg P = p$).

2) Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé

a) Fonctions symétriques élémentaires

Soit $(r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{K}^p$; les *fonctions symétriques élémentaires* de $r_1, \dots, r_p$ sont les

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq p} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k} \quad , \quad 1 \leq k \leq p.$$

La somme et le produit sont les seules au programme en PCSI :

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{p} r_i \quad , \quad \sigma_p = r_1 r_2 \dots r_p = \prod_{i=1}^{p} r_i \, .$$

b) Relations entre coefficients et racines

Théorème : soient $p \geq 1$, $P = \sum_{n=0}^{p} a_n X^n$ dans $\mathbb{K}[X]$, de degré p ($a_p \neq 0$), et $(r_1, \dots, r_p)$ dans $\mathbb{K}^p$.
$(r_1, \dots, r_p)$ est un système de racines de P si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}_p \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{p-k}}{a_p}.$$

En particulier, la somme des racines est $\sigma_1 = -\dfrac{a_{p-1}}{a_p}$ et leur produit est $\sigma_p = (-1)^p \dfrac{a_0}{a_p}$.
Lorsque c'est le cas, on a

$$P = a_p \prod_{i=1}^{p} (X - r_i) = a_p \left(X^p + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \sigma_k X^{p-k} \right) = a_p \left(X^p - \sigma_1 X^{p-1} + \cdots + (-1)^p \sigma_p \right).$$

c) Cas $p = 2$

Pour r_1, r_2 dans $\mathbb{K}$, on a : $(X - r_1)(X - r_2) = X^2 - \sigma_1 X + \sigma_2 \quad$ où $\quad \sigma_1 = r_1 + r_2 \quad$ et $\quad \sigma_2 = r_1 r_2$.

Il en résulte que, si l'on cherche deux nombres connaissant leur somme S et leur produit P, ces nombres forment nécessairement un système de racines du polynôme $X^2 - SX + P$. Ils existent toujours lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ils existent si et seulement si $S^2 - 4P \geq 0$.

VI - Polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$

1) Définition

Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit *irréductible* dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si P est non constant et admet pour seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ les λ et les λP, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Caractérisation : P, non constant, est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si P ne peut pas s'écrire sous la forme du produit de deux polynômes non constants.

Exemples : les polynômes de degré 1 sont irréductibles ; X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, mais pas dans $\mathbb{C}[X]$ (où $X^2+1=(X-i)(X+i)$).

2) Irréductibilité dans $\mathbb{C}[X]$

a) Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

b) Conséquences

1) Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

2) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

3) Tout polynôme non constant P de $\mathbb{C}[X]$ se décompose en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sous la forme

$$P=\lambda\prod_{j=1}^{m}(X-\alpha_j)^{k_j},$$

avec λ dans $\mathbb{C}^*$, les α_j dans $\mathbb{C}$, les k_j dans $\mathbb{N}^*$.

c) Exemple fondamental

Soit $n\in\mathbb{N}^*$; les racines du polynôme X^n-1 sont les racines n-ièmes de l'unité :

$$X^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{2ik\pi/n}\right).$$

3) Irréductibilité dans $\mathbb{R}[X]$

Propriétés : soient $P\in\mathbb{R}[X]$, $\alpha\in\mathbb{C}$.

1) $\overline{P(\alpha)}=P(\overline{\alpha})$.
2) Si α est racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est racine de P avec la même multiplicité.

Conséquences : 1) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

2) Tout polynôme non constant P de $\mathbb{R}[X]$ se décompose en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme

$$P=\lambda\prod_{i=1}^{m}(X-\alpha_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{n}(X^2+b_jX+c_j)^{\ell_j},$$

avec λ dans $\mathbb{R}^*$, les α_i,b_j,c_j dans $\mathbb{R}$, tels que : $\forall j\in\mathbb{N}_n\quad b_j^2-4c_j<0$ et les k_i,ℓ_j dans $\mathbb{N}^*$ (on peut avoir m ou n nul, le produit correspondant valant alors 1).

VII - Corps $\mathbb{K}(X)$ *(hors programme en PSI)*

1) Présentation

On pose $\mathcal{E} = \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$. Étant donné un couple (A, B) de $\mathcal{E}$, la *fraction rationnelle* F de *représentant* (A, B) est l'ensemble des couples (P, Q) de $\mathcal{E}$ tels que $AQ = BP$ (ces couples sont *les représentants* de F). On convient, si (P, Q) est l'un de ces couples, d'écrire

$$F = \frac{A}{B} = \frac{P}{Q}.$$

L'ensemble de ces fractions rationnelles, dites *à coefficients dans* $\mathbb{K}$, est noté $\mathbb{K}(X)$.

Étant donnés F, G dans $\mathbb{K}(X)$ et (A, B), (C, D) dans $\mathcal{E}$ tels que $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{C}{D}$, on vérifie que les fractions rationnelles $\dfrac{AD + BC}{BD}$ et $\dfrac{AC}{BD}$ restent inchangées si l'on remplace (A, B), (C, D) par d'autres représentants de F, G respectivement. On peut donc poser

$$F + G = \frac{AD + BC}{BD} \quad \text{et} \quad F \times G = \frac{AC}{BD}.$$

On vérifie que les deux lois de composition internes $+$ et $\times$ ainsi définies confèrent à $\mathbb{K}(X)$ une structure de corps.

On convient d'identifier P et $P/1$. $\mathbb{K}[X]$ apparaît ainsi comme un sous-anneau de $(\mathbb{K}(X), +, \times)$.

2) Degré d'une fraction rationnelle

Théorème et définition : soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ (avec A, B dans $\mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$).
L'élément $\deg A - \deg B$ de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ ne dépend pas du choix du représentant (A, B) de F. On l'appelle *degré* de F, noté $\deg F$.

NB : 1) La différence $\deg A - \deg B$ est bien définie dans $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ car B est non nul, donc $\deg B \in \mathbb{N}$.
2) Lorsque F est un polynôme, on retrouve bien son degré !

3) Représentants irréductibles

Définition : soit $F \in \mathbb{K}(X)$; on appelle *représentant irréductible* de F tout couple (A, B) de polynômes *premiers entre eux* (*i.e.* n'ayant aucun facteur irréductible commun dans $\mathbb{K}[X]$) tel que $F = \dfrac{A}{B}$. On dit aussi que la fraction $\dfrac{A}{B}$ est *irréductible*.

Propriétés : toute fraction rationnelle F admet des représentants irréductibles ; si (A, B) est l'un d'eux, alors l'ensemble des représentants irréductibles de F est $\{(\lambda A, \lambda B),\ \lambda \in \mathbb{K}^*\}$ et l'ensemble des représentants de F est $\{(AP, BP),\ P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\}$.

4) Fonctions rationnelles

Définition : soient $F \in \mathbb{K}(X)$ et (A, B) un représentant irréductible de F ; la fonction $\tilde{F}$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ qui à x associe $\tilde{F}(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ ne dépend pas du choix de (A, B) parmi les représentants irréductibles de F. On l'appelle *fonction rationnelle* associée à F.

Son ensemble de définition est $\mathbb{K} \setminus \{x \in \mathbb{K} \ / \ B(x) = 0\}$.

L'application $F \mapsto \tilde{F}$ définit un isomorphisme de corps de $\mathbb{K}(X)$ sur l'ensemble des fonctions rationnelles ; on *identifie* souvent F et $\tilde{F}$.

5) Zéros et pôles d'une fraction rationnelle

Soient $F \in \mathbb{K}(X)$, (A, B) un représentant irréductible de F, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

1) α est un *zéro d'ordre* k de F si et seulement si α est racine d'ordre k du numérateur A.

2) α est un *pôle d'ordre* k de F si et seulement si α est racine d'ordre k du dénominateur B.

6) Décomposition en éléments simples

a) Partie entière

Toute fraction rationnelle R de $\mathbb{K}(X)$ s'écrit de manière unique $R = E + F$, avec E polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et F fraction rationnelle de degré strictement négatif. E est la *partie entière* de R.
En outre, E est le quotient de la division euclidienne de A par B pour tout représentant (A, B) de R.

b) Partie polaire relative à un pôle α

Soit $R \in \mathbb{K}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}^*$ tels que α soit un pôle d'ordre k de R. R s'écrit de manière unique

$$R = \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{(X-\alpha)^j} + R_1$$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ et $R_1 \in \mathbb{K}(X)$, R_1 n'admettant pas α pour pôle.
$\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{(X-\alpha)^j}$ est la *partie polaire* de R relative au pôle α.

Remarques pratiques :

1) Le coefficient λ_k s'obtient immédiatement :

$$\lambda_k = \left[(X-\alpha)^k R\right](\alpha)$$

(la fraction rationnelle $(X-\alpha)^k R$ n'admet plus α pour pôle, on peut donc évaluer la fonction rationnelle associée en α !).
Si $R = \dfrac{A}{(X-\alpha)^k Q}$, avec A, Q polynômes tels que $A(\alpha) \neq 0, Q(\alpha) \neq 0$, alors

$$\lambda_k = \frac{A(\alpha)}{Q(\alpha)}.$$

Itération : une fois λ_k déterminé, on peut réduire au même dénominateur et simplifer $R - \dfrac{\lambda_k}{(X-\alpha)^k}$, dont α est pôle d'ordre strictement inférieur à k ! On peut alors appliquer les remarques précédentes à cette nouvelle fraction rationnelle et réitérer jusqu'à ce que α ne soit plus pôle...

2) *Cas d'un pôle simple* : si $R = \dfrac{A}{B}$, avec A, B polynômes tels que $B = (X-\alpha)Q$, $A(\alpha) \neq 0$, $Q(\alpha) \neq 0$, alors la partie polaire de R relative au pôle simple α se réduit à $\dfrac{\lambda}{X-\alpha}$, avec

$$\lambda = \frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}.$$

3) *Cas d'un pôle double* : si R admet α comme pôle d'ordre 2, la partie polaire correspondante est de la forme $\dfrac{\lambda_1}{X-\alpha} + \dfrac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2}$, avec

$$\lambda_2 = \left[(X-\alpha)^2 R\right](\alpha) \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \left[(X-\alpha)^2 R\right]'(\alpha)$$

(en effet $(X-\alpha)^2 R$ est de la forme : $\lambda_2 + (X-\alpha)\lambda_1 + (X-\alpha)^2 R_1$, où R_1 n'admet pas α pour pôle).

4) Penser aussi que, lorsqu'il ne manque qu'un ou deux coefficients, on peut obtenir une relation en évaluant R en un point bien choisi. Lorsque $\deg R < 0$, on peut également déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction rationnelle $x \mapsto xR(x)$.

c) Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Théorème : toute fraction rationnelle R de $\mathbb{C}(X)$ est égale à la somme de sa partie entière et de ses parties polaires.

On obtient ainsi l'existence et l'unicité de *la décomposition en éléments simples* de R sous la forme

$$R = E + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j} \right)$$

où :

- E est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ (la partie entière de R) ;
- les complexes α_i sont les pôles de R, k_i étant l'ordre de multiplicité de α_i ;
- les $\lambda_{i,j}$ sont des nombres complexes, coefficients des différentes parties polaires de R.

<u>*Exemple fondamental*</u> : **décomposition en éléments simples de** $\dfrac{P'}{P}$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $(r_1, \ldots, r_p)$ un système de racines de P (répétées selon leur multiplicité !). Ainsi, en notant a_p le coefficient dominant de P, on a :

$$P = a_p \prod_{i=1}^{p} (X - r_i) \quad \text{et} \quad \frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{X - r_i}.$$

En effet,

$$P' = a_p \sum_{i=1}^{p} \prod_{j \neq i} (X - r_j).$$

De même, en regroupant les racines multiples, notant $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ l'ensemble des racines de P et k_j la multiplicité de α_j pour tout j de $[\![1, m]\!]$, on a :

$$P = a_p \prod_{j=1}^{m} (X - \alpha_j)^{k_j} \quad \text{et} \quad \frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{X - \alpha_j}.$$

d) Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Toute fraction rationnelle R de $\mathbb{R}(X)$ se décompose sous la forme

$$R = E + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j} \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\ell_i} \frac{\mu_{i,j} X + \nu_{i,j}}{(X^2 + a_i X + b_i)^j} \right)$$

où :

- E est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ (la partie entière de R) ;
- les réels α_i sont les pôles de R, k_i étant l'ordre de multiplicité de α_i ;
- les $\lambda_{i,j}$ sont des nombres réels, coefficients des différentes parties polaires de R ;
- les termes de la dernière somme sont les *éléments simples de seconde espèce*, associés aux éventuels facteurs irréductibles du second degré du dénominateur de R dans $\mathbb{R}[X]$; les $\mu_{i,j}, \nu_{i,j}, a_i, b_i$ sont des réels tels que, pour tout i, $a_i^2 - 4b_i < 0$.

e) Cas particulier important

Si le dénominateur de R admet un unique facteur irréductible B ($R = \dfrac{A}{B^k}$ avec $A \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}^*$), alors la décomposition en éléments simples de R s'obtient en effectuant la division euclidienne de A par B, soit $A = BQ_1 + R_1$, puis la division euclidienne de Q_1 par B, soit $Q_1 = BQ_2 + R_2$, etc.
En effet on a alors :

$$R = \frac{A}{B^k} = \frac{Q_1}{B^{k-1}} + \frac{R_1}{B^k} = \frac{Q_2}{B^{k-2}} + \frac{R_2}{B^{k-1}} + \frac{R_1}{B^k} = \cdots$$

Tant que $Q_j \neq 0$, on a $\deg Q_j = \deg A - j \deg B$.
Or on stoppe bien sûr les calculs dès que $Q_j = 0$ ou $j = k$.
Par conséquent, l'itération s'arrête au pire avec le calcul de Q_k, qui est la partie entière de R.