Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de PCSI

I - Limites et relation d'ordre

Théorème : toute fonction admettant une limite strictement positive en un point (finie ou non) est minorée, au voisinage de ce point, par un réel strictement positif.

Théorème : soit f et g deux fonctions ayant le même ensemble de définition D, de limites respectives ℓ et ℓ' en a $\quad (\ell, \ell', a) \in \overline{\mathbb{R}}^3$.
Si $f \leq g$ sur $D \setminus \{a\}$, alors $\ell \leq \ell'$.

Attention ! Les inégalités strictes ne passent pas à la limite.

Théorème : soit f, g, h trois fonctions définies sur un même ensemble de définition D telles que : $f \leq g \leq h$ sur D, a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et ℓ un réel.

a) Si $\lim\limits_a f = \lim\limits_a h = \ell$, alors g admet la limite ℓ en a (*théorème d'encadrement*).

b) Si $\lim\limits_a f = +\infty$, alors $\lim\limits_a g = +\infty$.

c) Si $\lim\limits_a h = -\infty$, alors $\lim\limits_a g = -\infty$.

Théorème : limite d'une fonction monotone.
Soit a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ et $I =]a, b[$.

a) Si f est croissante sur I, alors f admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en a et en b.
 (i) Si f est majorée, alors $\lim\limits_b f = \sup\limits_I f$ $(\in \mathbb{R})$, sinon $\lim\limits_b f = +\infty$.

 (ii) Si f est minorée, alors $\lim\limits_a f = \inf\limits_I f$ $(\in \mathbb{R})$, sinon $\lim\limits_a f = -\infty$.

b) Si f est décroissante sur I, alors f admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en a et en b.
 (i) Si f est majorée, alors $\lim\limits_a f = \sup\limits_I f$ $(\in \mathbb{R})$, sinon $\lim\limits_a f = +\infty$.

 (ii) Si f est minorée, alors $\lim\limits_b f = \inf\limits_I f$ $(\in \mathbb{R})$, sinon $\lim\limits_b f = -\infty$.

II - Opérations algébriques sur les limites

Dans le tableau suivant, f et g sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies sur la même partie D de $\mathbb{R}$, a est un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D. Si $\lim\limits_a f$ (*resp.* $\lim\limits_a g$) existe, on la notera ℓ (*resp.* ℓ').

Fonction	Hypothèses sur f et g	Conclusion
$f+g$	ℓ et ℓ' existent et sont réelles	$\lim\limits_a (f+g) = \ell + \ell'$
$f+g$	f minorée au voisinage de a, ℓ' existe et vaut $+\infty$	$\lim\limits_a (f+g) = +\infty$
$f+g$	f majorée au voisinage de a, ℓ' existe et vaut $-\infty$	$\lim\limits_a (f+g) = -\infty$
λf	$\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad f$ a une limite finie ℓ	$\lim\limits_a (\lambda f) = \lambda \ell$
$f g$	ℓ et ℓ' existent et sont réelles	$\lim\limits_a (f g) = \ell \ell'$
$f g$	f minorée par $\alpha > 0$ au voisinage de a, ℓ' existe et vaut $+\infty$	$\lim\limits_a (f g) = +\infty$
$f g$	f majorée par $\beta < 0$ au voisinage de a, ℓ' existe et vaut $+\infty$	$\lim\limits_a (f g) = -\infty$
$\dfrac{1}{f}$	f à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ $\quad \ell$ existe, $\ell \neq 0$	$\lim\limits_a \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{\ell}$ $\quad$ (1)
$\dfrac{1}{f}$	f à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (resp; $\mathbb{R}_-^*$) $\quad \ell$ existe, $\ell = 0$	$\lim\limits_a \dfrac{1}{f} = +\infty$ (resp; $-\infty$)

(1) avec la convention $\dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$.

III - Continuité

1) Définitions

f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.

Définition : soit $a \in D$.
On dit que f est *continue* en a si et seulement si f admet une limite en a.
Dans ce cas, $\lim_a f = f(a)$ et

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \quad |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Définition : on dit que f est *continue à droite* (resp. *à gauche*) en a si et seulement si la restriction de f à $D \cap [a, +\infty[$ (*resp.* à $D \cap]-\infty, a]$) est continue en a.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \quad 0 \leq x-a \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

$$\textit{resp.} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \quad -\eta \leq x-a \leq 0 \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Théorème : f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en a.

Définition : *continuité sur un ensemble*
Soit E une partie de D. On dit que f est continue sur E si et seulement si la restriction de f à E est continue en chaque point de E.

Définition : *continuité uniforme (hors programme)*
On dit que f est *uniformément continue* sur D si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in D^2 \quad |y-x| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

(la continuité uniforme implique la continuité en tout a de D avec η **indépendant de** a).

2) Opérations sur les fonctions continues

Théorème : 1) Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, alors $f+g$, $\lambda f \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ et $f \times g$ sont continues sur I.
L'ensemble $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.
Si, de plus, g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.
2) Si f est continue sur I, à valeurs dans un intervalle J et g continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Théorème : 1) Si f est continue sur l'intervalle I, alors la restriction de f à tout intervalle J inclus dans I est continue sur J.
2) Si f est continue sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors f l'est aussi sur $[a, c]$.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $f^+ : x \mapsto \max\big(0, f(x)\big)$ et $f^- : x \mapsto \max\big(0, -f(x)\big)$.

On a : $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

Théorème : si f est continue sur l'intervalle I, alors f^+, f^- et $|f|$ sont continues sur I.

3) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : l'image d'un intervalle I par une fonction continue sur I est un intervalle.

Attention ! En général, $f(I)$ n'est pas de même nature topologique que I (cf. $\sin(]0, +\infty[) = [-1, 1]$).

Conséquences :

1) Si f est continue sur $[a, b]$, alors f prend toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

2) Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a)\ f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

4) Continuité sur un segment

Théorème : l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
Une fonction réelle continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

5) Fonctions continues strictement monotones sur un intervalle

Théorème : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b, $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et f une fonction continue strictement monotone sur I.

a) f admet, dans $\overline{\mathbb{R}}$, une limite en a et une limite en b.

b) $f(I)$ est un intervalle de même nature topologique (ouvert, fermé, semi-ouvert) que I d'extrémités $\lim\limits_{a} f$ et $\lim\limits_{b} f$.

c) f est bijective de I sur $f(I)$.

d) f^{-1} est continue strictement monotone de même sens que f sur $f(I)$.

Attention ! I peut être borné et $f(I)$ non borné (cf. $\tan(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbb{R}$).

IV - Dérivabilité

Les fonctions étudiées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle I (non réduit à un point) de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1) Définitions

Définition : soit a un point de I, on dit que f est *dérivable* en a si et seulement si la fonction

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

définie sur $I \setminus \{a\}$, admet une limite finie en 0.
Cette limite est alors appelée *nombre dérivé* de f en a et est notée $f'(a)$.

Notations : $f'(a)$ est aussi noté $\mathrm{D}f(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Définition : soit a un point de I tel que $I'_a = I \cap [a, +\infty[$ (*resp.* $I''_a = I \cap]-\infty, a]$) ne soit pas réduit au point a.
On dit que f est *dérivable à droite* (resp. *à gauche*) en a si et seulement si la restriction de f à I'_a (*resp.* à I''_a) est dérivable en a.
Si elle existe, une telle dérivée s'appelle *dérivée à droite* (resp. *à gauche*) de f en a et est notée $f'_d(a)$ (*resp.* $f'_g(a)$).

Définition : soit J un intervalle inclus dans I.
On dit que f est *dérivable sur* J si, et seulement si, la restriction de f à J est dérivable en tout point de J.
Dans ce cas, $f' : J \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ est appelée *application dérivée* de f sur J.

L'application f' est aussi notée $\mathrm{D}f$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Théorème : f est dérivable en a si et seulement si f admet le *développement limité à l'ordre* 1 :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + h.f'(a) + o(h)$$

Corollaire : toute fonction dérivable en a (*resp.* sur J) est continue en a (*resp.* sur J).

Attention ! La réciproque est fausse (cf. $x \mapsto |x|$).

Définition : on dit que f est *de classe* $\mathcal{C}^1$ sur I si et seulement si f est dérivable sur I et la fonction dérivée f' est continue sur I.

Attention ! On peut avoir f dérivable et f' non continue (cf. $x \mapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x}$).

2) Opérations sur les fonctions dérivables

a) Linéarité de la dérivation

Soit $(f,g) \in (\mathcal{D}(I,\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les fonctions $f+g$ et $\lambda.f$ sont dérivables sur I et :

$$(f+g)' = f' + g' , \quad (\lambda.f)' = \lambda.f'.$$

L'ensemble $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et la dérivation est linéaire de $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
$\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) Dérivation d'une fonction composée

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(J,\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et si $\varphi(J) \subset I$, alors

$$f \circ \varphi \text{ est dérivable sur } J \quad \text{et} \quad (f \circ \varphi)' = \varphi'.\left(f' \circ \varphi\right).$$

Si $\varphi \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et si $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$.

c) Dérivation d'un produit, d'un quotient

Soit $(f,g) \in (\mathcal{D}(I,\mathbb{R}))^2$: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ et, si g ne s'annule pas,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

d) Dérivation d'une bijection réciproque

Si f est une bijection continue et strictement monotone de I sur $J = f(I)$, dérivable en $a \in I$ tel que $f'(a) \neq 0$, alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$, avec

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}.$$

Si $f'(a) = 0$, le graphe de f^{-1} admet en b une (demi-)tangente parallèle à Oy.

Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J avec

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

3) Accroissements finis – Applications

a) Extremums locaux d'une fonction dérivable

Théorème : si f dérivable sur I admet en a **intérieur à** I un extremum local, alors $f'(a) = 0$.

Attention ! Peut être faux en une extrémité de I !!

b) Théorème de Rolle

Si f est continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors

$$\exists c \in \,]a,b[\quad f'(c) = 0.$$

c) Théorème des accroissements finis

Si f est continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a,b[$, alors

$$\exists c \in \,]a,b[\quad f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c).$$

Autrement dit, la tangente au graphe de f au point d'abscisse c est parallèle à la corde joignant les points d'abscisses a et b.

d) Inégalités des accroissements finis

1) Si $a < b$, f continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a,b[$ et si m, M sont deux réels tels que $m \leq f' \leq M$, alors

$$m \cdot (b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M \cdot (b-a)$$

2) Si f, g sont continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $]a,b[$ et si $|f'| \leq g'$, alors

$$|f(b) - f(a)| \leq |g(b) - g(a)|$$

Corollaire : soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point intérieur à I.
1) f est k-lipschitzienne sur I si et seulement si $|f'| \leq k$.
2) f est constante sur I si et seulement si f' est nulle en tout point intérieur à I.
3) f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ en tout point intérieur à I.
4) f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ en tout point intérieur à I.
5) f est strictement monotone sur I si et seulement si f' ne change pas de signe et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle non trivial.

e) Théorème de la limite de la dérivée

Si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et si $f'(x)$ tend vers ℓ (réel ou infini) lorsque x tend vers a, alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a. Si ℓ est réel, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

4) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

a) Dérivées successives

Définition : on définit par récurrence les dérivées successives de f : $f^{(0)} = f$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est *k fois dérivable* si $f^{(k-1)}$ est dérivable sur I et on note $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$.
On désigne par $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I.

Notations : $f^{(k)} = \mathrm{D}^k(f) = \dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.

Définition : **a)** Soit $k \in \mathbb{N}$; on dit que f est *de classe $\mathcal{C}^k$* sur I si et seulement si f est k fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ continue sur I.

b) f est dite *de classe $\mathcal{C}^\infty$* si et seulement si elle est indéfiniment dérivable sur I (autrement dit k fois dérivable pour tout k dans $\mathbb{N}$).

Notations : $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$: ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$: ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$: ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

b) Formule de Leibniz – Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Théorème : soit $k \in \mathbb{N}, f$ et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
si f et g sont k fois dérivables sur I, alors $\lambda . f + g$ est k fois dérivable sur I et :

$$(\lambda . f + g)^{(k)} = \lambda . f^{(k)} + g^{(k)}.$$

$\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Théorème : *formule de Leibniz*
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$.
Si f et g sont k fois dérivables sur I, alors $f \cdot g$ est k fois dérivable sur I et

$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(k-j)} . g^{(j)}.$$

Théorème : *composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$*
Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et J un intervalle de $\mathbb{R}$.
Si $\varphi \in \mathcal{C}^k(J, \mathbb{R}), f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ et $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(J, \mathbb{R})$.

Théorème : *bijection réciproque d'une bijection de classe $\mathcal{C}^k$*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$, strictement monotone sur I.
f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $f(I)$ si et seulement si f' ne s'annule pas sur I
(on parle alors de *$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme).*

V - Analyse asymptotique

1) Relations de comparaison

Soient f et g deux fonctions, définies au voisinage de a (réel ou infini).
On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a (éventuellement privé de a !), de sorte que le quotient f/g est défini au voisinage de a.

1) On dit que f *est dominée par* g *au voisinage de* a et l'on écrit $f \underset{a}{=} O(g)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} O\big(g(x)\big)$ (lire "grand O") si et seulement si f/g est borné au voisinage de a.

2) On dit que f *est négligeable devant* g *au voisinage de* a et l'on écrit $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$ (lire "petit O") si et seulement si f/g a pour limite 0 en a.

3) On dit que f *est équivalente à* g *au voisinage de* a et l'on écrit $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si f/g a pour limite 1 en a (la relation "est équivalente à" est une relation d'équivalence).

<u>*Exemple*</u> : si $f(x) = 7x^3 + 2x^2 + 1$, on a

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} O\left(x^3\right) \ ; \quad f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} o\left(x^4\right) \ ; \quad f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} 7x^3$$

L'usage est d'employer dans les O et les o des "*fonctions de référence*" les plus simples possibles et de n'écrire comme équivalent que la "*partie principale*" : tout terme supplémentaire, négligeable devant la partie principale, est inutile et risque de prêter à confusion.
Avec l'exemple ci-dessus, on n'écrit pas $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} 7x^3 + x$ alors que c'est vrai...
Si l'on veut préciser l'écart entre deux fonctions équivalentes, on essaie de trouver un équivalent de la différence : $f(x) - 7x^3 \underset{x\to\pm\infty}{\sim} 2x^2$ et l'on peut itérer...
NB : $f \underset{a}{\sim} g$ équivaut à $f - g \underset{a}{=} o(g)$ **mais pas à** $\lim\limits_{a} (f-g) = 0$!

2) Propriétés des équivalents

1) Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$

2) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $f^n \underset{a}{\sim} g^n$ (n exposant **constant**)

3) Si $f \underset{a}{\sim} g$, avec f, g à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ (α exposant **constant**)

4) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et f, g à valeurs s dans $\mathbb{R}^{+*}$, admettant en a une limite **différente de 1**, alors $\ln f \underset{a}{\sim} \lg n$.

5) $e^f \underset{a}{\sim} e^g$ si et seulement si $\lim\limits_{a} (f-g) = 0$.

Attention ! $\lim\limits_{a} (f-g) = 0$ n'est pas équivalent à $f \underset{a}{\sim} g$ (les deux implications sont fausses) !

Substitution : si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{t\to b} \varphi(t) = a$, alors $f\big(\varphi(t)\big) \underset{t\to b}{\sim} g\big(\varphi(t)\big)$

<u>*Exemple*</u> : $\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$, donc, si $\lim\limits_{t\to b} \varphi(t) = 1$, alors $\ln \varphi(t) \underset{t\to b}{\sim} \varphi(t) - 1$ (cf. prop. **4** ci-dessus).

Attention aux combinaisons linéaires d'équivalents ! Si les coefficients de la combinaison font que les parties principales s'annulent, on a besoin de développements limités plus précis pour obtenir un équivalent de ladite combinaison.
<u>*Exemple*</u> : trouver la partie principale de $x \cos x - \sin x$ au voisinage de 0.

3) Propriétés conservées par équivalence

Lorsque $f \underset{a}{\sim} g$:

- si g est de signe constant au voisinage de a, alors f est du même signe que g au voisinage de a
- si g admet une limite en a, alors f admet la même limite en a.

Mais le sens de variation n'est pas conservé ! Par exemple $x + 2\sin x \underset{\infty}{\sim} x$...

VI - Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Dans toute cette section, a et b sont deux réels et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1) Définition et premières propriétés

Lorsque $a < b$, pour $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$, on définit, par exemple grâce à l'approximation à ε près par des fonctions en escalier, l'intégrale de f sur $[a,b]$, notée $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, qui vérifie les propriétés suivantes.

a) Intégrale d'une constante

Si C est une constante réelle, $\int_a^b C = (b-a)\,C$.

b) Relation de Chasles

Définition : si f est continue sur un intervalle I et si c et d sont deux éléments de I tels que $c \geq d$, on pose $\int_c^d f = -\int_d^c = -\int_{[c,d]} f$ (car $[c,d] = [d,c]\ldots$) ; en particulier $\int_c^c f = 0$.

Propriété : relation de Chasles

Si a, b, c sont trois points d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{C}^0(I, F)$, alors

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

c) Linéarité par rapport à la fonction

L'application : $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f$ est linéaire :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b (\lambda . f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$$

d) Positivité, croissance

Soit $(f,g) \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})^2$.

1) *Positivité* : si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ et $a \leq b$, alors $\int_a^b f \geq 0$.

2) *Croissance de l'intégrale* : si $f \leq g$ sur $[a,b]$ et $a \leq b$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

3) *Inégalité de la moyenne* : $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_{[a,b]} |f| \leq |b-a| \sup_{[a,b]} |f|$.

Attention ! Si $a > b$, $\int_{[a,b]} |f| = \int_b^a |f|$.

4) Si f est de signe constant, continue et d'intégrale nulle sur $[a,b]$, alors f est nulle sur $[a,b]$.

Définition : si $a \neq b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$, $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f$ est *la valeur moyenne de f sur* $[a,b]$ (c'est la valeur de l'application **constante** ayant même intégrale que f sur $[a,b]$).

Propriété : *extension de l'inégalité de la moyenne*

Si $(f,g) \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})^2$, alors :

$$\left|\int_{[a,b]} f.g\right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \cdot \int_{[a,b]} |g|\,.$$

2) Sommes de Riemann

Définition : soit $\sigma_n = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a,b]$ à pas constant : $\forall k \in [\![0,n]\!] \quad a_k = a+k\dfrac{b-a}{n}$; pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on appelle *somme de Riemann* associée à f et σ_n toute somme de la forme :

$$R(f,\sigma_n) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) .f(c_k) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \quad \text{où} \quad \forall k \in \mathbb{N}_n \quad c_k \in [a_{k-1}, a_k].$$

Théorème : si f est continue sur $[a,b]$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} R(f,\sigma_n) = \displaystyle\int_a^b f$.

Cas particuliers :

- avec $\forall k \in \mathbb{N}_n \quad c_k = a_{k-1}$, on obtient $\displaystyle\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.
- avec $\forall k \in \mathbb{N}_n \quad c_k = a_k$, on obtient $\displaystyle\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.

3) Dérivation et intégration

a) Primitives d'une fonction continue

Définition : soient $f \in \mathcal{C}^0(I,F)$ et $g : I \to \mathbb{R}$; g est *une primitive de* f si et seulement si g est dérivable sur I, avec $g' = f$ (donc g est $\mathcal{C}^1$ sur I).

Propriété : si f admet une primitive g_0 sur I, alors :

- $*$ l'ensemble des primitives de f sur I est $\{g_0 + C,\ C \in \mathbb{R}\}$;
- $*$ pour tout $(a,b) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique primitive g de f sur I telle que $g(a) = b$.

Théorème fondamental

Soient $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$; f admet des primitives sur I et l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a est l'application

$$g : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour toute primitive h de f sur I, on a :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = h(b) - h(a) \ \text{ encore noté } \ \big[h(t)\big]_a^b.$$

Corollaire : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors

$$\forall a \in I \quad \forall x \in I \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

NB : pour f continue sur I, on a en particulier, pour a fixé dans I, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x)$ et, si u et v sont deux fonctions dérivables à valeurs dans I,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = v'(x).f[v(x)] - u'(x).f[u(x)].$$

b) Intégration par parties

Soient $u : I \to \mathbb{R}$, $v : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b u'(t).v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u(t).v'(t)\,\mathrm{d}t$$

<u>Exercice</u> : on en déduit par récurrence la *formule d'intégration par parties itérée* ; si u et v sont de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, alors

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b u^{(k+1)}.v = \left[\sum_{n=0}^{k} (-1)^n u^{(k-n)}.v^{(n)}\right]_a^b + (-1)^{k+1}.\int_a^b u.v^{(k+1)}$$

c) Changement de variable

Théorème : soient $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ telle que $\varphi([\alpha,\beta]) \subset I$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \varphi'(t).f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}t$$

NB : ce résultat est souvent utilisé avec φ bijective (strictement monotone) pour transformer $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (en posant $x=\varphi(t)$, $\alpha=\varphi^{-1}(a)$ et $\beta=\varphi^{-1}(b)$).

Applications

- Soit f continue par morceaux sur $[-a,a]$:

$$\text{si } f \text{ est paire}, \int_{-a}^a f = 2.\int_0^a f \quad ; \text{ si } f \text{ est impaire}, \int_{-a}^a f = 0.$$

- Soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, T-périodique :

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad \int_a^b f = \int_{a+T}^{b+T} f \quad \text{et} \quad \int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f$$

- Changements de variables usuels pour les calculs de primitives (cf. poly spécifique).

d) Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral : soient f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I et $a\in I$. On a

$$\forall x\in I \quad f(x) = T_k(x) + R_k(x) \quad \text{où} \quad T_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{(x-a)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(a)$$

et, en posant $t = a + u.(x-a)$

$$R_k(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!}\cdot f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(x-a)^{k+1}}{k!}\int_0^1 (1-u)^k\cdot f^{(k+1)}\big[a+u.(x-a)\big]\,\mathrm{d}u$$

Dém. Récurrence sur k + intégration par parties...

Inégalité de Taylor-Lagrange (complément hors programme) : si f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I, alors

$$\forall (a,x)\in I^2 \quad |f(x)-T_k(x)| = |R_k(x)| \leq \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\sup_{[a,x]}\left|f^{(k+1)}\right|.$$

NB : les deux résultats précédents ont un caractère *global*, tandis que les deux suivants donnent un renseignement *local*.

Primitivation d'un développement limité : soient φ continue sur I, $a\in I$; si φ admet un DL_k en a,

$$\varphi(x) = C_0 + (x-a).C_1 + \cdots + (x-a)^k.C_k + o\left((x-a)^k\right)$$

alors $\Phi : x \mapsto \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ admet le DL_{k+1} en a suivant :

$$\Phi(x) = (x-a).C_0 + \frac{(x-a)^2}{2}\cdot C_1 + \cdots + \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}\cdot C_k + o\left((x-a)^{k+1}\right)$$

Corollaire : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, $a\in I$ et f' admet un DL_k en a,

$$f'(x) = C_0 + (x-a).C_1 + \cdots + (x-a)^k.C_k + o\left((x-a)^k\right)$$

alors f admet le DL_{k+1} en a suivant :

$$f(x) = f(a) + (x-a).C_0 + \frac{(x-a)^2}{2}\cdot C_1 + \cdots + \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}\cdot C_k + o\left((x-a)^{k+1}\right)$$

Attention !

Si l'on connaît le DL_{k+1} de f *et si l'on sait que f' admet un* DL_k alors ce dernier s'obtient par dérivation terme à terme de celui de f,
mais par exemple $f : x \mapsto x^3 \sin \dfrac{1}{x^2}$ (prolongée par $f(0) = 0$) admet le DL_2 en 0 : $f(x) = o\left(x^2\right)$ tandis que f' n'admet pas de DL_1 en 0 (elle n'est même pas continue !).

Formule de Taylor-Young : si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $a \in I$, alors f admet le DL_k en a suivant :

$$f(x) = T_k(x) + o\left((x-a)^k\right) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^k\right).$$

Exemples : les développements limités usuels, y compris ceux qui s'obtiennent par intégration ($\ln(1+x)$, $\arctan x$, $\arcsin x$, etc.)