Calcul pratique de primitives

Pour alléger, les constantes d'intégration ne figurent pas et sont à ajouter par le lecteur.

I - Primitives d'une fonction rationnelle

Une fonction rationnelle f admet des primitives sur tout intervalle ne contenant aucun pôle de f.
On peut les obtenir à partir de la décomposition en éléments simples de f.

NB : vérifier toutefois au préalable si l'on ne peut pas *"intégrer à vue"*, par exemple $\dfrac{x^4-4x^3+1}{x^5-5x^4+5x-12}$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, à un coefficient multiplicatif constant près...).

1) Partie entière

C'est un polynôme...

2) Éléments simples de première espèce

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^m}\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|x-\alpha| & \text{si } m=1 \\ \dfrac{-A}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}} & \text{si } m>1 \end{cases}$$

3) Éléments simples de seconde espèce

Ils sont de la forme $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+\lambda x+\mu)^m}\mathrm{d}x$, que l'on sépare en deux termes, le premier de la forme $\displaystyle\int \frac{u'}{u^m}$, le second avec un numérateur constant :

$$Ax+B = \frac{A}{2}(2x+\lambda) + B - \frac{A}{2}\lambda$$

d'où

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+\lambda x+\mu)^m}\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+\lambda}{(x^2+\lambda x+\mu)^m}\mathrm{d}x + \left(B-\frac{A}{2}\lambda\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\lambda x+\mu)^m}.$$

Le premier terme s'intègre à vue, pour le second, on met $x^2+\lambda x+\mu$ sous forme canonique $(x-\alpha)^2+\beta^2$ (avec α,β réels, $\beta \neq 0$ puisqu'il n'y a pas de racine réelle par hypothèse), puis on effectue le changement de variable affine $t = \dfrac{x-\alpha}{\beta}$.

On se ramène ainsi au calcul de $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^m}$:

- pour $m=1$, on connaît une primitive : $t \mapsto \arctan t$!
- pour $m>1$, on peut poser $\theta = \arctan t$, $t = \tan\theta$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}$ et $\dfrac{1}{t^2+1} = \cos^2\theta$, d'où

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^m} = \int \cos^{2m-2}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

et il n'y a plus qu'à linéariser $\cos^{2m-2}\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^{2m-2}\dots$

NB : pour revenir à la variable t (puis x...) se rappeler :

$$\cos\arctan t = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \quad \text{et} \quad \sin\arctan t = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Autre idée : une intégration par parties fournit une relation de récurrence entre les $F_n(t) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$ (c'est intéressant lorsqu'on a besoin de la collection $F_1(t), F_2(t), \ldots, F_m(t)$).

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = \frac{t}{(t^2+1)^n} - \int t \cdot \frac{-2nt}{(t^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}t = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}t$$

autrement dit :

$$F_n(t) = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \cdot \left[F_n(t) - F_{n+1}(t)\right]$$

soit

$$2nF_{n+1}(t) = \frac{t}{(t^2+1)^n} + (2n-1)F_n(t).$$

On en déduit de proche en proche les $F_n(t)$, partant de $F_1(t) = \arctan t$.

NB : la même idée fournit la relation de récurrence classique entre les *intégrales de Wallis* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \mathrm{d}\theta$.

4) Exemples

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \quad ; \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|.$$

$$\int \frac{1-x}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

II - Primitives d'une fonction rationnelle en $\cos$ et $\sin$

Soit $R(X,Y)$ une fonction rationnelle *"à deux indéterminées"* (*i.e.* un quotient de sommes de monômes de la forme aX^pY^q). On cherche $\displaystyle\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ (sur des intervalles à préciser…).

1) Cas où R est un polynôme

Par linéarité de l'intégrale, on est ramené au calcul de $\displaystyle\int \cos^p x \sin^q x \mathrm{d}x$.

- si p (*resp.* q) est impair, on peut poser $t = \sin x$ (*resp.* $t = \cos x$) pour se ramener à un polynôme ;
- si p et q sont pairs, on linéarise par l'intermédiaire des exponentielles complexes ou de formules de trigonométrie.

2) Méthode générale $\left(t = \tan\dfrac{x}{2}\right)$

Si $x \in \left]-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi\right[$ ($k \in \mathbb{Z}$), on pose $x = 2\arctan t + 2k\pi$ $\left(t = \tan\dfrac{x}{2}\right)$ et l'on a :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

ce qui conduit à une fonction rationnelle en t.

3) Règles de Bioche

Elle peuvent permettre de trouver un autre changement de variable que le précédent, parfois plus efficace.

Si l'*intégrande* $\omega(x) = R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par le changement	alors on peut poser	car $R(\cos x, \sin x)$ peut se mettre sous la forme
$x \mapsto -x$	$u = \cos x$	$\sin x \cdot f_1(\cos x)$
$x \mapsto \pi - x$	$u = \sin x$	$\cos x \cdot f_2(\sin x)$
$x \mapsto \pi + x$	$u = \tan x$	$f_3(\cos^2 x)$

Procédé mnémotechnique : la nouvelle variable est invariante par le même changement que l'intégrande.

4) Cas d'une fonction rationnelle en ch et sh

- Le cas d'un polynôme est similaire à celui des fonctions circulaires.
- Méthode générale : poser $x = \ln t$ $(t = e^x)$; on a alors :
$$\operatorname{ch} x = \frac{t^2+1}{2t}\ ,\ \operatorname{sh} x = \frac{t^2-1}{2t}\ ,\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t},$$
ce qui conduit à une fonction rationnelle en t.
- *Règles de Bioche* : elles s'appliquent, en remplaçant au préalable ch, sh respectivement par cos, sin, puis en appliquant les règles précédentes à la nouvelle intégrale obtenue. Si elles conduisent au changement de variable $u = \cos x$ (*resp.* $u = \sin x$, *resp.* $u = \tan x$), c'est qu'on peut poser, dans l'intégrale initiale, $u = \operatorname{ch} x$ (*resp.* $u = \operatorname{sh} x$, *resp.* $u = \operatorname{th} x$) !

III - Exemples d'intégrales abéliennes

Soit à nouveau $R(X, Y)$ une fonction rationnelle à deux indéterminées.

1) Primitives de $R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ $(n \geq 2,\ ad - bc \neq 0)$

Le changement de variable $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ conduit à intégrer une fonction rationnelle en t.
En effet, si $c \neq 0$:
$$x = \frac{-dt^n + b}{ct^n - a} = -\frac{d}{c} - \frac{ad-bc}{c\left(ct^n - a\right)} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}x = \frac{ad-bc}{\left(ct^n - a\right)^2} \cdot nt^{n-1}\mathrm{d}t$$
et si $c = 0$ (on peut alors supposer $d = 1$ et a est nécessairement non nul) :
$$x = \frac{t^n - b}{a} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}}{a}\mathrm{d}t$$
Exemples :
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{x-1}} = \int \frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2+t} = \ln\left(1+t^2+t\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C^{ste} \quad \text{où} \quad t = \sqrt{x-1}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6 \cdot \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(1+t)\right) \quad \text{où} \quad t = \sqrt[6]{x}\ !$$

2) Primitives de $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ (où $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$!)

a) Première idée : forme canonique et trigonométrie

- si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ se met sous la forme $a\left[(x-\alpha)^2 - \beta^2\right]$, avec $\beta > 0$.
  - si $a > 0$, on pose $x - \alpha = \beta \operatorname{ch}\theta$ sur $[\alpha, +\infty[$ (*resp.* $x - \alpha = -\beta\operatorname{ch}\theta$ sur $]-\infty, \alpha]$) avec $\theta \geq 0$ et l'on a :
  $$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot \beta \operatorname{sh}\theta,$$
  ce qui conduit à une fonction rationnelle en ch et sh ;
  - si $a < 0$, on pose $x - \alpha = \beta\cos\theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$ et l'on a :
  $$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a} \cdot \beta \sin\theta,$$
  ce qui conduit à une fonction rationnelle en cos et sin.

- si $\Delta < 0$, ax^2+bx+c se met sous la forme $a\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]$, avec $\beta > 0$ (ici nécessairement $a > 0$, sinon la fonction étudiée ne serait définie nulle part !).
  On peut alors poser :
  * soit $x-\alpha = \beta \operatorname{sh}\theta$ et l'on a :
  $$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot\beta\operatorname{ch}\theta,$$
  ce qui conduit à une fonction rationnelle en ch et sh ;
  * soit $x-\alpha = \beta\tan\theta$ avec $\theta \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ et l'on a :
  $$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}\cdot\beta}{\cos\theta},$$
  ce qui conduit à une fonction rationnelle en cos et sin.

b) Autre idée lorsque $\Delta > 0$

On peut se ramener à la racine carrée d'une fonction homographique (cf. **1)**), en écrivant
$$ax^2+bx+c = a\cdot(x-\lambda)(x-\mu), \quad \text{avec} \quad \lambda < \mu.$$

- si $a > 0$, sur $\left]-\infty, \lambda\right]$ ou sur $\left]\mu, +\infty\right[$, on écrit par exemple
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,|x-\mu|\sqrt{\frac{x-\lambda}{x-\mu}}.$$
- si $a < 0$, sur $\left]\lambda, \mu\right]$, on écrit par exemple
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}\,(x-\lambda)\sqrt{\frac{\mu-x}{x-\lambda}}.$$

c) Autre idée lorsque $a > 0$

On peut se ramener à une fonction rationnelle en t en posant :
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a}+t \quad \text{ou} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = -x\sqrt{a}+t.$$
En effet, par exemple avec l'expression de gauche :
$$ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2 \quad \text{d'où} \quad x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t},$$
les intervalles d'étude étant à préciser...

Exemple :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right| \text{ (sur } \mathbb{R} \text{ si } \alpha > 0 \text{ et sur } \left]-\infty, -a\right[\text{ ou } \left]a, +\infty\right[\text{ si } \alpha = -a^2 < 0).$$

Pour éviter les fonctions hyperboliques, je pose :
$$\sqrt{x^2+\alpha} = -x+t \ ; \ x^2+\alpha = x^2-2xt+t^2 \ ; \ x = \frac{t^2-\alpha}{2t} = \frac{t}{2}-\frac{\alpha}{2t}$$
d'où
$$\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2t^2}\right)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2+\alpha} = -x+t = \frac{t}{2}+\frac{\alpha}{2t}$$
et donc
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|.$$

NB : on retrouve bien les expressions logarithmiques des fonction argch et argsh (désormais hors programme),
$$\forall x \in \left]1, +\infty\right[\quad \operatorname{argch} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{argsh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$