Algèbre linéaire de PCSI

I - Structure d'espace vectoriel

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Définition

On appelle $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* tout triplet $(E,+,.)$ où :

1) E est un ensemble dont les éléments sont appelés *vecteurs*.

2) $+$ est une loi de composition interne sur E telle que $(E,+)$ soit un groupe abélien.
L'élément neutre 0 est appelé *vecteur nul*.

3) $.: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$ est une loi de composition externe vérifiant :

- $\ast$ $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2 \quad \forall x\in E \quad (\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x$;
- $\ast$ $\forall\lambda\in\mathbb{K} \quad \forall(x,y)\in E \quad \lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$;
- $\ast$ $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2 \quad \forall x\in E \quad \lambda.(\mu.x)=(\lambda\mu).x$;
- $\ast$ $\forall x\in E \quad 1.x=x$.

Exemples : 1) $(\mathbb{K},+,.)$ où . est la multiplication dans $\mathbb{K}$.
2) L'ensemble E^D des applications d'un ensemble D dans un espace vectoriel E (les opérations dans E^D étant définies grâce à celles de E : $f+g : x\mapsto f(x)+g(x)$; $\lambda.f : x\mapsto \lambda.f(x)$).

2) Propriétés élémentaires

- $\forall x\in E \quad 0.x=0$.
- $\forall\lambda\in\mathbb{K} \quad \lambda.0=0$.
- $\forall(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times E \quad \lambda.x=0 \Leftrightarrow (\lambda=0 \text{ ou } x=0)$.
- $\forall(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times E \quad (-\lambda).x=-(\lambda.x)=\lambda.(-x)$.

3) Espace vectoriel produit

Soit $\big((E_k,+,.)\big)_{1\le k\le n}$ une famille de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
L'ensemble $E_1\times\cdots\times E_n$ muni des lois $+$ et . définies par :

- $(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$
- $\lambda.(x_1,\ldots,x_n)=(\lambda.x_1,\ldots,\lambda.x_n)$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, appelé *espace vectoriel produit* de $E_1,\ldots,E_n$.

Exemples : 1) L'exemple canonique est $\mathbb{K}^n$.
2) $\mathbb{C}$ s'identifie à $\mathbb{R}^2$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

II - Sous-espaces vectoriels

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) Définition

Soit F une partie de E. On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E si et seulement si la restriction de la loi $+$ à $F\times F$ et la restriction de la loi . à $\mathbb{K}\times F$ induisent sur F une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2) Caractérisations

Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

- $0 \in F$ et
  $\forall (x,y) \in F^2 \quad x+y \in F$ et
  $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F \quad \lambda.x \in F$;

ou bien

- $0 \in F$ et
  $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (x,y) \in F^2 \quad \lambda.x + y \in F$.

3) Intersection de sous-espaces vectoriels

Théorème : l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Attention ! En général, l'union de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E (c'en est un si et seulement si l'un des deux sous-espaces considérés est inclus dans l'autre…).

4) Sous-espace engendré par une partie ou une famille

Soit A une partie de E. On appelle *sous-espace vectoriel engendré par* A l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A, notée $\operatorname{Vect} A$.

$\operatorname{Vect} A$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous-espaces de E contenant A.

$\operatorname{Vect} A$ est l'ensemble formé du vecteur nul et des vecteurs de la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k.a_k$, où les λ_k sont des scalaires et les a_k des vecteurs de A ($\operatorname{Vect} \emptyset = \{0\}$).

Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de E, on note $\operatorname{Vect}(x_i)_{i\in I}$ les sous-espace engendré par la partie $\{x_i,\ i \in I\}$.

5) Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition : soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, on appelle *somme de F et G* la partie de E notée $F+G$ définie par : $F+G = \{x \in E \ / \ \exists (y,z) \in F \times G \quad x = y+z\}$.

Théorème : $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G (autrement dit $F+G = \operatorname{Vect}(F \cup G)$).

6) Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition : deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits *supplémentaires dans* E si et seulement si tout vecteur de E se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall x \in E \quad \exists ! (y,z) \in F \times G \quad x = y+z \ .$$

Théorème : les assertions suivantes sont équivalentes :

a) F et G sont supplémentaires dans E.

b) $E \subset F+G$ et $F \cap G = \{0\}$.

Attention ! Ne pas confondre ***un*** *supplémentaire* et ***le*** *complémentaire*. Si x est un vecteur de E qui n'appartient pas à F, x n'est pas pour autant nécessairement dans G ! On peut seulement affirmer *a priori* que x s'écrit $y+z$, avec $(y,z) \in F \times G$ et $z \neq 0$…

III - Translations, sous-espaces affines *(hors programme en PCSI)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) Translations

Définition : pour tout vecteur a de E, on appelle *translation de vecteur* a l'application $\tau_a : v \mapsto a+v$, de E dans E .

Propriétés : 1) $\tau_0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall (a,b) \in E^2 \quad \tau_a \circ \tau_b = \tau_{a+b}$.
2) Pour tout a de E, τ_a est bijective et $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$.

2) Sous-espaces affines

Définition : on appelle *sous-espace affine de* E toute partie W de E de la forme $a+F$, où F est un sous-espace vectoriel de E et où l'on note :

$$a + F = \tau_a(F) = \{a+v,\ v \in F\}$$

Exemples : 1) Pour tout a de E, $a + \{0\} = \{a\}$.
2) Pour v vecteur non nul de E, et $a \in E$, $a + \operatorname{Vect} v$ est *la droite affine passant par* a *dirigée par* v.

Théorème et définition : soit $W = a + F$ un sous-espace affine de E ; alors pour tout b de W, on a $W = b + F$; par contre, le sous-espace vectoriel F est unique, on l'appelle *la direction* de W.

NB : dans un contexte géométrique, les éléments de E sont aussi appelés *points*.
A et B étant deux points de E, $\overrightarrow{AB} = B - A$ est appelé *vecteur d'origine* A *et d'extrémité* B.
Ainsi, v étant un vecteur de E, $B = A + v = \tau_v(A)$ équivaut à $\overrightarrow{AB} = v$.

IV - Applications linéaires

1) Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et u une application de E dans F.
On dit que u est *linéaire* (ou encore un *morphisme d'espaces vectoriels*) si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in E^2 \quad u(x+y) = u(x) + u(y) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad u(\lambda.x) = \lambda.u(x) \end{cases}$$

(ou bien : $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (x,y) \in E^2 \quad u(\lambda.x + y) = \lambda.u(x) + u(y)$)

Si, de plus :

- u est bijective, on dit que u est un *isomorphisme* (E et F sont dits *isomorphes*) ;
- $E = F$, on dit que u est un *endomorphisme* de E ;
- $E = F$ et u bijective, on dit que u est un *automorphisme* de E ;
- $F = \mathbb{K}$, on dit que u est une *forme linéaire* sur E.

Notations : on désigne par

- $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F ;
- $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E ($\mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$).

Propriétés : soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) $u(0_E) = 0_F$.

2) Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.

3) Si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

2) Image

Définition : soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle *image de* u le sous-espace $u(E)$ de F noté $\operatorname{Im} u$:

$$\operatorname{Im} u = \{y \in F \ / \ \exists x \in E \quad u(x) = y\} = \{u(x),\ x \in E\} \ .$$

Propriété : u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.

3) Noyau

Définition : soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle *noyau de* u le sous-espace $u^{-1}(\{0_F\})$ de E noté $\operatorname{Ker} u$:

$$\operatorname{Ker} u = \{x \in E \ / \ u(x) = 0_F\}.$$

Propriété : u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$
(ou encore si et seulement si : $\forall x \in E \quad u(x) = 0_F \Rightarrow x = 0_E$).

4) Équations linéaires

Étant donnés u dans $\mathcal{L}(E, F)$ et b dans F, la résolution de l'*équation linéaire* $u(x) = b$ est la recherche de l'ensemble $\mathcal{S}$ des vecteurs x de E tels que $u(x) = b$.
$\mathcal{S}$ est vide si et seulement si b n'appartient pas à $\operatorname{Im} u$.
Lorsque b est dans $\operatorname{Im} u$, $\mathcal{S}$ est non vide et pour tout x_0 dans $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ est l'ensemble des vecteurs de E de la forme $x_0 + z$, z décrivant $\operatorname{Ker} u$:

$$\mathcal{S} = x_0 + \operatorname{Ker} u = \{x_0 + z,\ z \in \operatorname{Ker} u\} \ .$$

5) Exemples fondamentaux d'isomorphismes

- Tous les supplémentaires dans E d'un même sous-espace vectoriel de E sont isomorphes.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E est isomorphe à $\operatorname{Im} u$.
- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} F \times G & \longrightarrow & F + G \\ (y, z) & \longmapsto & y + z \end{array}$ est linéaire surjective. C'est un isomorphisme si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

6) Opérations sur les applications linéaires

a) Structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors $(\mathcal{L}(E, F), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

b) Composition des applications linéaires

Si E, F, G sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.
Pour ϕ fixé dans $\mathcal{L}(E, F)$, l'application $v \mapsto v \circ \phi$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(F, G)$ dans $\mathcal{L}(E, G)$.
Pour ψ fixé dans $\mathcal{L}(F, G)$, l'application $u \mapsto \psi \circ u$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E, G)$.

Théorème : si u est un isomorphisme de E dans F, alors u^{-1} est linéaire (donc un isomorphisme) de F dans E.

c) Structure de $\mathcal{L}(E)$

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $(\mathcal{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-*algèbre*.

Théorème et définition : soit $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E. $(GL(E), \circ)$ est un groupe (non abélien en général), appelé *groupe linéaire de* E.

V - Projecteurs et symétries

1) Projecteurs

Définition : soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E ; l'application p de E dans E qui à tout vecteur x de E associe le vecteur y de F tel que $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times G$ est appelée *projecteur* (ou *projection vectorielle*) de E sur F parallèlement à G.

Propriétés : soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G.

a) p est un endomorphisme de E.

b) $\operatorname{Ker} p = G$ et $\operatorname{Im} p = F$; F est l'ensemble des vecteurs invariants par p.

c) $\mathrm{Id}_E - p$ est le projecteur de E sur G parallèlement à F.

Caractérisation : soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.
Dans ce cas, p est le projecteur de E sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

2) Symétries vectorielles

Définition : soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E ; l'application s de E dans E qui à tout vecteur x de E associe le vecteur $y - z$ de E où (y, z) est le couple de $F \times G$ tel que $x = y + z$ est appelée *symétrie vectorielle* par rapport à F parallèlement à G.

Propriétés : soit s la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G.

a) s est un automorphisme involutif de E.

b) L'ensemble des vecteurs invariants par s est F ; l'ensemble des vecteurs transformés en leur opposé est G.

c) $-s$ est la symétrie vectorielle par rapport à G parallèlement à F.

d) Si p est le projecteur de E sur F parallèlement à G, on a les relations :

$$s = 2p - \mathrm{Id}_E \ , \ p = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{Id}_E + s) \, .$$

Caractérisation : soit $s \in \mathcal{L}(E)$. s est une symétrie vectorielle si et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
Alors s est la symétrie par rapport à $F = \{x \in E \ / \ s(x) = x\} = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $G = \{x \in E \ / \ s(x) = -x\} = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

VI - Familles libres, génératrices ; bases

1) Familles génératrices

Définition : soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs de E. On dit qu'un vecteur x de E est *combinaison linéaire* des vecteurs de $\mathcal{F}$ si et seulement s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i . x_i$.

Définition : soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une *famille génératrice* de E si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$ (*i.e.* $\operatorname{Vect} \mathcal{F} = E$).

Propriétés : 1) Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
2) Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille finie, génératrice de E et J une partie de I. $(x_i)_{i \in J}$ est aussi une famille génératrice de E si et seulement si, pour tout k de $I \backslash J$, x_k est combinaison linéaire des vecteurs de $(x_i)_{i \in J}$.

2) Familles libres

Définition : soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est *libre* si et seulement si la seule combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathcal{F}$ est celle dont tous les coefficients sont nuls :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \quad \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . x_k = 0 \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_p \ \lambda_k = 0 \right).$$

Une famille quelconque $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.
Une partie A de E est dite libre si et seulement si la famille $(x)_{x \in A}$ est libre.
Par convention, $\emptyset$ est libre.

Propriétés : 1) Soit $x \in E$. La famille (x) formée du seul vecteur x est libre si et seulement si x est non nul.
2) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
3) Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si, pour toute famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ à support fini,

$$\sum_{i \in I} \lambda_i . x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I \quad \lambda_i = 0.$$

4) Si une partie A de E est libre et si x est un vecteur de E, $A \cup \{x\}$ est libre si et seulement si x n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de A (i.e. $x \notin \operatorname{Vect} A$).

3) Familles liées

Définition : une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E (resp. une partie A de E) est dite *liée* si et seulement si elle n'est pas libre. On dit alors que les vecteurs de $\mathcal{F}$ (resp. de A) sont *linéairement dépendants*.
Deux vecteurs sont dits *colinéaires* si et seulement s'ils sont linéairement dépendants.

Caractérisation : 1) Une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est liée si et seulement s'il existe des vecteurs $x_1, \dots, x_p$ de $\mathcal{F}$ et une famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ de scalaires non tous nuls telle que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . x_k = 0 \quad (\textit{relation de dépendance linéaire}).$$

2) Une famille d'au moins deux vecteurs est liée si et seulement si l'un au moins de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.
3) Deux vecteurs x, y sont colinéaires si et seulement si : $x = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad y = \lambda . x$.

Propriétés : 1) Toute sur-famille d'une famille liée est liée ; toute famille contenant le vecteur nul est liée.
2) Si une partie A de E est libre et si x est un vecteur de E, $A \cup \{x\}$ est liée si et seulement si x est combinaison linéaire des vecteurs de A (i.e. $x \in \operatorname{Vect} A$).

4) Bases

Définition : soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{F}$ est une *base* de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice.

Une famille $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Dans ce cas, si $x = \displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i . e_i$, la famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ est appelée *la famille des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$*.

5) Caractérisation des familles libres et génératrices, des bases

Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. On lui associe l'application linéaire ϕ de $\mathbb{K}^p$ dans E qui, à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ associe la combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k$.

Propriétés : 1) $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre si et seulement si ϕ est injective ;
2) $\operatorname{Im} \phi = \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$;
$(x_1, \ldots, x_p)$ est génératrice si et seulement si ϕ est surjective ;
3) $(x_1, \ldots, x_p)$ est une base de E si et seulement si ϕ est un isomorphisme.

6) Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Théorème : soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs de E et $u(\mathcal{F}) = (u(x_i))_{i \in I}$.

a) Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E, alors $u(\mathcal{F})$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.

b) Si $\mathcal{F}$ est liée, alors $u(\mathcal{F})$ est liée.

c) Si $\mathcal{F}$ est libre et u injective, alors $u(\mathcal{F})$ est libre.

Théorème : soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B}$ une base de E.

a) u est surjective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F.

b) u est injective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est libre.

c) u est bijective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une base de F.

7) Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

Théorème : soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E et $(y_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F (indexées par *le même* ensemble I).
Il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que :

$$\forall i \in I \quad u(e_i) = y_i \ .$$

En outre :

* u est injective si et seulement si la famille $(y_i)_{i \in I}$ est libre.
* u est surjective si et seulement si la famille $(y_i)_{i \in I}$ est génératrice de F.
* u est bijective si et seulement si la famille $(y_i)_{i \in I}$ est une base de F.

VII - Notion de dimension

Définition : on dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est *de dimension finie* si, et seulement si, il admet une famille génératrice finie.

<u>**Lemme de Steinitz**</u>

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une famille génératrice à p éléments ($p \in \mathbb{N}^*$), alors toute famille d'au moins $p+1$ éléments est liée.

<u>**Existence d'une base**</u>

Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$ admet au moins une base.

Théorème et définition : soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0\}$.
1) E admet au moins une base finie $\mathcal{B}$.
2) Toutes les bases de E ont le même cardinal n.
Cet entier est appelé *dimension* de E et est noté $\dim E$ ou $\dim_{\mathbb{K}} E$.
On convient que $\{0\}$ est de dimension nulle.

<u>**Caractérisation des bases**</u> :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs de E.

- Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $p \leq n$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.
- Si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $p \geq n$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.

VIII - Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Pour toute famille libre $\mathcal{L}$ de E et toute famille génératrice $\mathcal{G}$ de E, il existe au moins une base $\mathcal{B}$ de E obtenue en complétant $\mathcal{L}$ à l'aide de vecteurs de $\mathcal{G}$.
En particulier, pour toute famille libre $\mathcal{L}$ de E, il existe au moins une base $\mathcal{B}$ de E obtenue en complétant $\mathcal{L}$ à l'aide de vecteurs de E.

IX - Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

1) Dimension d'un sous-espace

Théorème : soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.
F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.
De plus, $F = E$ si et seulement si $\dim F = \dim E$.

Définition : on appelle *rang* d'une famille de vecteurs de E la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille.

2) Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Caractérisation : soient F et G deux sous-espaces vectoriels non réduits à $\{0\}$ d'un espace vectoriel E de dimension finie. F et G sont supplémentaires dans E si et seulement s'ils admettent pour bases respectives deux parties complémentaires d'une base de E.

Conséquence : si $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.

Théorème : tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie admet au moins un supplémentaire dans E.

Théorème : soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow (F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E)\,.$$

3) Dimension d'une somme quelconque de sous-espaces

Théorème : soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \textit{ (formule de Grassmann).}$$

Conséquence : soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow (F + G = E \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E)\,.$$

X - Théorème du rang

1) Théorème d'isomorphisme

Théorème : deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

2) Rang d'une application linéaire

Théorème du rang

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie, alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et

$$\dim E = \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u.$$

Définition : soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie. On appelle *rang* de u la dimension de $\operatorname{Im} u$, notée $\operatorname{rg} u$.

Propriété : si E et F sont de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors :
u injective $\Rightarrow \dim E \leq \dim F$; u surjective $\Rightarrow \dim E \geq \dim F$.

Caractérisation des isomorphismes

Si E et F sont de *même* dimension finie ($\dim E = \dim F = n$) et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- u est bijective ;
- u est injective (*i.e.* $\operatorname{Ker} u = \{0\}$) ;
- u est surjective (*i.e.* $\operatorname{rg} u = n$) ;
- u est inversible à droite ;
- u est inversible à gauche.

Propriété : le rang d'une application linéaire est invariant par composition avec un isomorphisme.

XI - Opérations sur les dimensions

Théorème : soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1) $E \times F$ est de dimension finie et : $\dim E \times F = \dim E + \dim F$.

2) $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et : $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

Dém : on considère $(e_j)_{1 \le j \le p}$ une base de E et $(f_i)_{1 \le i \le n}$ une base de F.

1) En posant $v_1 = (e_1, 0_F), \cdots, v_p = (e_p, 0_F)$; $v_{p+1} = (0_E, f_1), \cdots, v_{p+n} = (0_E, f_n)$, on vérifie que $(v_i)_{1 \le i \le p+n}$ est une base de $E \times F$.

2) Pour tout élément (i, j) de $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$, on désigne par $u_{i,j}$ l'unique application linéaire de E vers F telle que ($\delta_{j,k}$ désignant le *symbole de Kronecker*) :

$$\forall k \in \mathbb{N}_p \quad u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k}.f_i$$

On vérifie que $(u_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est une base de $\mathcal{L}(E, F)$.

XII - Matrices – Généralités

1) Définition - notations

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
On appelle *matrice de type* (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau M constitué de n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. On écrit $M = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$, $a_{i,j}$ étant le terme situé à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne de M.
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ des matrices *carrées d'ordre* n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

2) Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$.
Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle *matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$* la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs $u(e_1), \ldots, u(e_p)$ dans la base $\mathcal{C}$ de F :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \quad \text{avec} \quad \forall j \in \mathbb{N}_p \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.f_i.$$

NB : le nombre de lignes n est la dimension de l'espace *d'arrivée* ;
le nombre de colonnes p est la dimension de l'espace *de départ.*

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle *matrice de u dans la base $\mathcal{B}$* la matrice carrée $M_{\mathcal{B}}(u)$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dont les colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs $u(e_1), \ldots, u(e_p)$ dans la *même* base $\mathcal{B}$ de E.

XIII - Opérations sur les matrices

1) Structure de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose, par définition :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \text{ et } \lambda.A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} .$$

Théorème : $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np.

La *base canonique* de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ où $E_{i,j}$ est la *matrice élémentaire* dont tous les termes sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne, valant 1 : $E_{ij} = (\delta_{k,i}\delta_{\ell,j})_{\substack{1\leq k\leq n\\ 1\leq \ell\leq p}}$.

Avec les notations précédentes, l'application $u \mapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Inversement, étant donnée $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note souvent $\operatorname{Can} A$ l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans les bases canoniques.

2) Produit matriciel

Définition : soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ et $B = (b_{j,k})_{\substack{1\leq j\leq n\\ 1\leq k\leq p}}$. $A \times B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$définie par :

$$A \times B = (c_{i,k})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq k\leq p}} \quad \text{où} \quad \forall (i,k) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_p \quad c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,k} .$$

Propriété : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ a pour matrice A dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, si X est la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x de E dans la base $\mathcal{B}$, alors le produit AX est la matrice colonne des coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Produit de matrices élémentaires : si $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$ sont des matrices élémentaires de tailles convenables pour que le produit soit défini, on a $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k}.E_{i,\ell}$.
(où $E_{i,\ell}$ a bien sûr le nombre de lignes de $E_{i,j}$ et le nombre de colonnes de $E_{k,\ell}$).

3) Structure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (non commutative pour $n \geq 2$). Avec les notations précédentes, l'application $u \mapsto M_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
L'élément neutre de la multiplication est la *matrice identité d'ordre* n : $I_n = (\delta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

Définition : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que :

- $a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}$ constituent la *diagonale principale* de A ;
- A est une *matrice scalaire* si et seulement si A est de la forme $\lambda.I_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$;
- A est une *matrice diagonale* si et seulement si $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$;
  dans ce cas on note $A = \operatorname{diag}(a_{1,1}, \ldots a_{n,n})$;
- A est une *matrice triangulaire supérieure* si et seulement si $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$;
- A est une *matrice triangulaire inférieure* si et seulement si $i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

Propriétés : les matrices scalaires forment un corps isomorphe à $\mathbb{K}$.
Les matrices diagonales forment une sous-algèbre commutative de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$.
Les matrices triangulaires supérieures (*resp.* inférieures) forment une sous-algèbre de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$.

4) Matrices carrées inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; A est *inversible* si et seulement si

$$\exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad A \times A' = A' \times A = I_n$$

Soit $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles. $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe (non commutatif pour $n \geq 2$).

Théorème : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) A est inversible.

b) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad A \times B = I_n$ (dans ce cas $A^{-1} = B$).

c) $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad C \times A = I_n$ (dans ce cas $A^{-1} = C$).

Propriété : une matrice triangulaire est inversible si et seulement si les éléments de sa diagonale principale sont tous non nuls.

5) Transposition

Définition : soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *transposée* de A la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée ${}^tA$ (ou A^T), définie par

$${}^tA = (a'_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} \quad \text{où} \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}_p \times \mathbb{N}_n \quad a'_{i,j} = a_{j,i} .$$

Propriétés :

1) L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

2) $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad {}^t(AB) = {}^tB \times {}^tA$.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si ${}^tA$ est inversible, auquel cas $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Définition : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que :

* A est *symétrique* si et seulement si ${}^tA = A$
  ($\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2 \quad a_{i,j} = a_{j,i}$) ;
* A est *antisymétrique* si et seulement si ${}^tA = -A$
  ($\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2 \quad a_{i,j} = -a_{j,i}$; en particulier $\forall i \in \mathbb{N}_n \quad a_{i,i} = 0$).

Propriété : les matrices symétriques d'une part, antisymétriques d'autre part, forment deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

XIV - Changements de bases

1) Matrice d'un système de vecteurs dans une base

Soit $\mathcal{B}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle *matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* la matrice M de type (n,p) dont la j^{e} colonne $(1 \leq j \leq p)$ contient les coordonnées du vecteur x_j dans la base $\mathcal{B}$.

2) Matrice de passage

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. On appelle *matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$* la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

NB : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme de E qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$; c'est aussi la matrice de Id_E dans les bases $\mathcal{B}'$ (dans E considéré comme espace de départ) et $\mathcal{B}$ (dans E considéré comme espace d'arrivée).

Propriétés : soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

a) si X et X' sont les matrices colonnes des coordonnées d'un vecteur u de E dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement, on a : $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, X'$.

b) $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

c) Si $\mathcal{B}''$ est une troisième base de E, on a : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$.

3) Changement de bases pour une application linéaire

Théorème : soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F, $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si A est la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et A' la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, alors $A' = Q^{-1}AP$.

4) Changement de base pour un endomorphisme

Théorème : soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si A est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ et A' la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$, alors $A' = P^{-1}AP$.

Définition : deux matrices carrées A et B d'ordre n sont *semblables* si et seulement si :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \quad B = P^{-1}AP.$$

i.e. si et seulement si A et B représentent un même endomorphisme dans deux bases.

XV - Rang d'une matrice

Définition : soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *rang* de A le rang du système de ses p vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^n$, noté $\operatorname{rg} A$.

Théorème : soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, rapportés aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Si u est une application linéaire de E dans F, de matrice A dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, alors $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} A$.

Conséquences :

1) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\operatorname{rg} A = r$ si et seulement si A est de la forme UJ_rV, où U, V sont deux matrices carrées inversibles et $J_r = (\alpha_{i,j})$ est définie par : $\alpha_{i,j} = 1$ si $i = j \leq r$, $\alpha_{i,j} = 0$ sinon.

2) $\operatorname{rg} {}^tA = \operatorname{rg} A$ (le rang d'une matrice est aussi le rang du système de ses vecteurs lignes).

3) Le rang d'une matrice est inchangé lorsqu'on la multiplie par une matrice carrée inversible.

4) Une matrice carrée d'ordre n est inversible si et seulement si son rang est égal à n.

XVI - Opérations élémentaires sur les matrices

1) Définitions

On appelle *opération élémentaire* sur une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

1) l'échange de deux lignes (*resp.* colonnes) de A
(codage $L_i \leftrightarrow L_j$ (*resp.* $C_i \leftrightarrow C_j$)) ;

2) la multiplication d'une ligne (*resp.* colonne) de A par un scalaire *non nul*
(codage $L_i \leftarrow \lambda.L_i$ (*resp.* $C_i \leftarrow \lambda.C_i$) avec $\lambda \neq 0$) ;

3) l'ajout à une ligne (*resp.* colonne) le produit d'*une autre* ligne (*resp.* colonne) de A par un scalaire
(codage $L_i \leftarrow L_i + \lambda.L_j$ (resp. $C_i \leftarrow C_i + \lambda.C_j$) avec $j \neq i$).

Deux matrices A et A' sont dites *équivalentes par lignes* (resp. *colonnes*) si et seulement si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes (*resp.* colonnes), ce que l'on note $A \underset{L}{\sim} A'$ (*resp.* $A \underset{C}{\sim} A'$).

2) Interprétation en termes de produit matriciel

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $E_{i,j}$ est une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors le produit $E_{i,j} \times A$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la i^{e} ligne est constituée par la j^{e} ligne de A et dont toutes les autres lignes sont nulles. Il en résulte les correspondances suivantes :

Opération	Interprétation matricielle	Dénomination
$L_i \leftarrow L_i + \lambda.L_j$	$A \leftarrow (I_n + \lambda.E_{i,j})A$	*transvection*
$L_i \leftarrow \lambda.L_i$	$A \leftarrow (I_n + (\lambda - 1).E_{i,i})A$	*dilatation*
$L_i \leftrightarrow L_j$	$A \leftarrow (I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i})A$	*transposition*

.

Les opérations sur les colonnes de A s'obtiennent par multiplication *à droite* par des matrices carrées d'ordre p inversibles analogues.

Théorème : deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes ont le même rang (on vérifie que les matrices $I_n + \lambda.E_{i,j}$ $(j \neq i)$, $I_n + (\lambda - 1).E_{i,i}$ $(\lambda \neq 0)$ et $I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ sont inversibles).

3) Applications

a) Calcul du rang d'une matrice

La *phase de descente* de l'algorithme du *pivot de Gauss-Jordan* permet, en utilisant exclusivement des opérations élémentaires sur les lignes, de transformer toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en une matrice *échelonnée par lignes*, c'est-à-dire vérifiant les deux propriétés suivantes :

- si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi
- à partir de la 2[e] ligne, dans chaque ligne non nulle, le 1[er] coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente

autrement dit de la forme suivante (en anglais *row echelon form*, voir la fonction `ref` de certaines calculatrices) :

$$A_{\texttt{ref}} = \begin{pmatrix} \mathrm{piv}_1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathrm{piv}_2 & * & \cdots & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \ddots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathrm{piv}_r & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{piv}_1, \ldots, \mathrm{piv}_r$ sont des scalaires non nuls, les *pivots*.

Le nombre r desdits pivots n'est autre que le rang de la matrice A (puisqu'elle a même rang que $A_{\texttt{ref}}$).

b) Calcul de l'inverse d'une matrice carrée

La *phase de remontée* de l'algorithme du *pivot de Gauss-Jordan* permet, toujours par des opérations élémentaires sur les lignes, de transformer la matrice $A_{\texttt{ref}}$ précédente en une matrice *échelonnée réduite par lignes*, c'est-à-dire nulle ou échelonnée par lignes avec tous ses pivots égaux à 1 et seuls éléments non nuls de leur colonne, autrement dit de la forme suivante (en anglais *reduced row echelon form*, fonction `rref`) :

$$A_{\texttt{rref}} = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \ddots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(on a divisé la ligne de chaque pivot par ledit pivot et fait ensuite apparaître des 0 au dessus dudit pivot, le tout "en remontant").

Théorème : toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.

La matrice initiale A est inversible si et seulement si $n = p = r$, c'est-à-dire si et seulement si $A \underset{L}{\sim} I_n$, auquel cas $A_{\mathtt{rref}}$ n'est autre que I_n, ce qui fournit une méthode "pratique" de calcul de l'inverse de A lorsqu'elle existe : en effet, si je note $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ les matrices associées aux opérations élémentaires sur les lignes utilisées pour transformer A en $A_{\mathtt{rref}} = I_n$, j'ai

$$\Omega_k \ldots \Omega_1 A = I_n \quad \text{d'où} \quad A^{-1} = \Omega_k \ldots \Omega_1 = \Omega_k \ldots \Omega_1 I_n \quad (!!)$$

Il en résulte que A^{-1} s'obtient en faisant subir à la matrice I_n, successivement et dans le même ordre, les opérations élémentaires sur les lignes qui permettent de transformer A en I_n.

c) Résolution d'un système linéaire

Par des opérations élémentaires sur les lignes, on transforme tout système linéaire $AX = B$ en un système équivalent ayant une matrice de la forme $A_{\mathtt{rref}}$ ci-dessus. Les $n - r$ dernières lignes sont de la forme : $0 = \beta_j$ (β_j étant l'expression au second membre résultant des opérations sur les lignes, expression "constante", indépendante des *inconnues* du système, pouvant par contre dépendre de *paramètres* initialement présents dans les coefficients du système...).

Ces $n - r$ dernières lignes sont *les conditions de compatibilité* du système. En effet, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est non vide si et seulement si les β_j, $j \in [\![r + 1, n]\!]$, sont tous nuls.

Lorsque lesdites conditions de compatibilité sont satisfaites, on achève la résolution en renvoyant au second membres les $p-r$ inconnues ne correspondant pas aux colonnes des pivots (*inconnues auxiliaires* ou *paramètres*) et l'on exprime les r inconnues correspondant aux colonnes des pivots (*inconnues principales*) en fonction des coefficients du système et des inconnues auxiliaires, qui peuvent être choisies arbitrairement. Cela fournit une *représentation paramétrique* de l'ensemble des solutions. Noter la présence de $p - r$ paramètres, alors que l'on savait que $\mathcal{S}$ (ici non vide !) était un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de direction $\operatorname{Ker}\operatorname{Can} A$, justement de dimension $p - r$ (cf. le théorème du rang !!).

On en déduit une "solution particulière" a et une base de $\operatorname{Ker}\operatorname{Can} A$, en faisant apparaître la "solution générale" comme élément d'un sous-espace affine de la forme $W = a+\operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_{p-r})$ (les coefficients des vecteurs $v_1, \ldots, v_{p-r}$ étant les inconnues auxiliaires). On a ainsi $\mathcal{S} \subset W$, avec $\mathcal{S}$ de dimension $p-r$ et W de dimension au plus $p - r$: par conséquent $\mathcal{S} = W$, $\operatorname{Ker}\operatorname{Can} A = \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_{p-r})$ et donc $(v_1, \ldots, v_{p-r})$ est une base de $\operatorname{Ker}\operatorname{Can} A$.

XVII - Déterminants

Dans cette section, n est un entier supérieur ou égal à 2 et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1) Déterminant d'une matrice carrée

Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1) f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ;

2) f est *antisymétrique* par rapport aux colonnes de sa variable, c'est-à-dire que si A' se déduit de A par transposition de deux colonnes, $f(A') = -f(A)$;

3) $f(I_n) = 1$.

On note $\det(A)$ le nombre $f(A)$ pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) Propriétés du déterminant

1) $\forall (\lambda, A) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

2) Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes identiques est nul.

3) On peut ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres sans modifier le déterminant.

4) Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients de la diagonale.

5) Le déterminant d'un produit de matrices **carrées** est le produit de leurs déterminants.

6) Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Si c'est le cas, $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
Par conséquent, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et toute matrice P de $GL_n(\mathbb{K})$, on a
$$\det\left(P^{-1}AP\right) = \det(A)\,.$$

7) Toute matrice carrée a même déterminant que sa transposée.
Par conséquent, le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis à vis des lignes que des colonnes.

3) Développement d'un déterminant

Définition : soit $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; pour tout couple (i,j) dans $\mathbb{N}_n^2$,
le *cofacteur de l'élément d'indice* (i,j) *dans* M est le scalaire
$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det M_{i,j}$$
où $M_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue à partir de M
en supprimant la ligne i et la colonne j.

Théorème : soit $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on a :
1) *développement par rapport à la colonne j* : pour j fixé dans $\mathbb{N}_n$,
$$\det M = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, A_{i,j}$$
2) *développement par rapport à la ligne i* : pour i fixé dans $\mathbb{N}_n$,
$$\det M = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, A_{i,j}$$

4) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Étant données une base $\mathcal{B}$ de E et une famille $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ de n vecteurs de E (où $n = \dim E$), on appelle *déterminant de la famille $\mathcal{U}$ dans la base $\mathcal{B}$* le déterminant de la matrice (carrée !) de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{B}$, noté $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{U}$.

Théorème : $\mathcal{U}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{U} \neq 0$, dans une (toute) base $\mathcal{B}$ de E.

NB : si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$ est le déterminant de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

5) Déterminant d'un endomorphisme

D'après la propriété **6** ci-dessus, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, le déterminant de la matrice de u dans une base de E ne dépend pas du choix de ladite base.
Ce déterminant commun est appelé *déterminant de u*, noté $\det(u)$.

Les propriétés suivantes découlent immédiatement de celles du déterminant des matrices carrées.

1) Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, on a :
$$\forall (v_1, \ldots v_n) \in E^n \quad \det_{\mathcal{B}}\left(u(v_1), \ldots u(v_n)\right) = \det(u)\,.\det_{\mathcal{B}}\left(v_1, \ldots v_n\right)$$
et en particulier : $\det(u) = \det M_{\mathcal{B}}(u) = \det_{\mathcal{B}}\left(u(e_1), \ldots u(e_n)\right)$.

2) $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{K} \times \mathcal{L}(E) \quad \det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.

3) Le déterminant d'une composée d'endomorphismes est le produit de leurs déterminants.

4) Un endomorphisme u est bijectif si et seulement si $\det(u) \neq 0$. Si c'est le cas, $\det\left(u^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(u)}$.