Dérivées n-ièmes usuelles

D est l'opérateur de dérivation.
n désigne un entier naturel.
Les intervalles de validité sont à préciser.

- $D^n(\exp) = \exp$; $D^{2n}(\mathrm{ch}) = \mathrm{ch}$; $D^{2n+1}(\mathrm{ch}) = \mathrm{sh}$; $D^{2n}(\mathrm{sh}) = \mathrm{sh}$; $D^{2n+1}(\mathrm{sh}) = \mathrm{ch}$

- $D^n(\cos)(x) = \cos\left(x + n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$; $D^{2n}(\cos) = (-1)^n \cos$; $D^{2n+1}(\cos) = (-1)^{n+1} \sin$

- $D^n(\sin)(x) = \sin\left(x + n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$; $D^{2n}(\sin) = (-1)^n \sin$; $D^{2n+1}(\sin) = (-1)^n \cos$

- pour $a \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x-a)^k\right] = \begin{cases} k(k-1)\dots(k-n+1).(x-a)^{k-n} = \dfrac{k!}{(k-n)!}(x-a)^{k-n} & \text{si } n < k \\ n! & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{x-a}\right) = \frac{(-1)^n.n!}{(x-a)^{n+1}}$$

(on en déduit les dérivées de toute fonction rationnelle,
après décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$)

- pour $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x-a)^\alpha\right] = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1).(x-a)^{\alpha-n} \quad (\text{sur }]a,+\infty[)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[|x-a|^\alpha\right] = \alpha \cdot \frac{|x-a|^\alpha}{x-a} \quad \text{et}$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[|x-a|^\alpha\right] = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \cdot \frac{|x-a|^\alpha}{(x-a)^n} \quad (\text{sur }]-\infty,a[\text{ et sur }]a,+\infty[)$$