Développements en série entière usuels (en 0)

1) ***Exponentielle, fonctions cosinus et sinus*** (rayon de convergence : $+\infty$)

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

2) ***Fonctions puissances et applications*** (rayon de convergence : 1)

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n \\ &= 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + \cdots\end{aligned}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

NB : dans les cas $\alpha = \pm 1/2$, penser à écrire, notamment pour profiter de la formule de Stirling :

$$\frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2^n.n!} = \frac{1.2.3.4.5.\cdots.(2n-1).(2n)}{2.4.\cdots.(2n).2^n.n!} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$