Croissances comparées des fonctions usuelles

I - Fonctions d'une variable réelle

Le résultat de base est $\dfrac{\ln t}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit :

$$\boxed{\forall \alpha > 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{\alpha}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

et

$$\boxed{\forall a > 1 \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \frac{x^{\beta}}{a^{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

en écrivant, pour $\beta > 0$ (seul cas litigieux)

$$\frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{\alpha}} = \frac{1}{(\alpha/\beta)^{\beta}} \cdot \left(\frac{\ln t}{t}\right)^{\beta} \quad \text{avec} \quad t = x^{\alpha/\beta}$$

et

$$\frac{x^{\beta}}{a^{x}} = \frac{1}{(\ln a)^{\beta}} \cdot \frac{(\ln t)^{\beta}}{t} \quad \text{avec} \quad t = a^{x}, \text{ soit } x = \frac{\ln t}{\ln a}$$

Attention ! Se méfier des phrases toutes faites et prendre garde aux fonctions composées...

Par exemple, ici ce n'est pas "l'exponentielle qui l'emporte" :

$$\frac{x^2}{e^{\ln x}} = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Moralité : se ramener à l'un des cas ci-dessus au moyen d'un changement de variable si besoin.

Exemples :

- $x^2 (\ln x)^3 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$: de la forme $-\dfrac{(\ln t)^3}{t^2}$ avec $t = \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$
- $x^2 e^{-\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: de la forme $\dfrac{t^4}{e^t}$ avec $t = \sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

  (on peut aussi écrire $e^{-\sqrt{x}+2\ln x} = e^{-\sqrt{x}\left(1-\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}\right)}$ et l'exposant tend vers $-\infty$)

II - Suites numériques

Les résultats ci-dessus (en $+\infty$) s'appliquent bien sûr en remplaçant x réel par n entier !
On ajoute, dans le programme officiel :

$$\boxed{\forall a > 1 \quad \frac{a^n}{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{n!}{n^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

Ces résultats s'obtiennent en majorant par une suite géométrique (cf. la règle de d'Alembert).