12. Calcul différentiel – Courbes et surfaces

Dans tout le chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie p (en pratique, on aura souvent $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$). Sauf indication contraire, les applications étudiées sont définies sur un ouvert U de E, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\|\cdot\|$ désignera, en cas de besoin, une norme sur E.

Les notions définies dans ce chapitre sont indépendantes du choix des normes.

I - Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ – Généralités

1) Différentielle en un point

Propriété – définition : soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$; f est dite *différentiable en* a si et seulement s'il existe une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que l'on ait le *développement limité à l'ordre* 1

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|).$$

Si c'est le cas, φ est unique, notée $\mathrm{d}f(a)$ appelée *différentielle de* f *en* a (ou encore *forme linéaire tangente* à f en a).

Par commodité, $\varphi(h)$ est noté $\mathrm{d}f(a) \cdot h$

On a alors

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + o(\|h\|) \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}f(a) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}).$$

NB : 1) Comme U est ouvert et $a \in U$, $a + h \in U$ pour $\|h\|$ assez petite.

2) Si f est différentiable en a, alors f est continue en a (**réciproque fausse** déjà pour $p = 1$).

Exemples :

1) *Cas $p = 1$* : lorsque $E = \mathbb{R}$, "différentiable" équivaut à "dérivable" et, si f est dérivable en a, $\mathrm{d}f(a)$ est l'application linéaire $\mathrm{d}f(a) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \mathrm{d}f(a) \cdot h = h.f'(a) \end{array}$ et $f'(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot 1$.

2) *Cas où f est linéaire* : si $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, f est différentiable en tout point a de E et

$$\forall a \in E \quad \mathrm{d}f(a) = f.$$

3) Si $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée à un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, alors $f : x \mapsto \|x\|^2$ est différentiable en tout point a de E et

$$\forall a \in E \quad \mathrm{d}f(a) : h \mapsto 2.(a|h)$$

2) Dérivée selon un vecteur

NB : U étant ouvert, pour $a \in U$ et v vecteur non nul de E, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in [-\delta, \delta] \quad a + t.v \in U.$$

Définition : soient $f : U \to \mathbb{R}$, $v \in E \setminus \{0\}$ et $a \in U$; on dit que f admet une *dérivée en* a *selon le vecteur* v si et seulement si la fonction $\varphi_v : t \mapsto f(a + t.v)$ est dérivable en 0 ; on note si c'est le cas

$$\mathrm{D}_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}.\left[f(a+t.v) - f(a)\right] \ \left(= \varphi_v'(0)\right)$$

($\mathrm{D}_v f(a)$ est un réel).

Théorème : si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée en a selon tout vecteur non nul v avec

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot v$$

Attention ! Réciproque fausse dès que $p \geq 2$, voir

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

qui admet une dérivée en $(0, 0)$ selon tout vecteur non nul alors qu'elle n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

3) Dérivées partielles

Définition : soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $j \in \mathbb{N}_p$; on dit que f admet en a une *j-ième dérivée partielle* (relativement à $\mathcal{B}$) si et seulement si f admet une dérivée suivant le vecteur e_j ; on note si c'est le cas

$$\partial_j f\,(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\,(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}.\left[f\,(a + t.e_j) - f\,(a)\right] \in \mathbb{R}.$$

__Cas particulier__ : lorsque $E = \mathbb{R}^p$ et que $\mathcal{B}$ est la base canonique, la j-ième dérivée partielle s'obtient en dérivant la j-ième application partielle de f en a, obtenue en fixant toutes les variables sauf la j-ième.

Théorème : si f est différentiable en a, alors f admet des dérivées partielles en a relativement à toute base avec

$$\partial_j f\,(a) = \mathrm{d}f\,(a) \cdot e_j.$$

Attention ! Réciproque fausse dès que $p \geq 2$, voir l'exemple du paragraphe précédent.

NB : pour f différentiable en a, le théorème précédent fournit l'expression analytique de $\mathrm{d}f\,(a)$ dans toute base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E :

$$\text{si } h = \sum_{j=1}^{p} h_j.e_j\ , \quad \mathrm{d}f\,(a) \cdot h = \sum_{j=1}^{p} h_j.\partial_j f\,(a) = \sum_{j=1}^{p} h_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}\,(a)\,.$$

4) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème : s'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E telle que, pour tout j de $\mathbb{N}_p$, $\partial_j f$ est définie et continue sur U, alors f est différentiable en tout point a de U avec

$$\forall a \in U \quad \forall h = \sum_{j=1}^{p} h_j.e_j \in E \quad \mathrm{d}f\,(a) \cdot h = \sum_{j=1}^{p} h_j.\partial_j f\,(a)\,.$$

En outre, pour tout vecteur non nul v de E, $\mathrm{D}_v f$ est définie et continue sur U.

__*Dém.*__ non exigible

Définition : f est dite *de classe $\mathcal{C}^1$* (ou *continûment différentiable*) sur U si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que, pour tout j de $\mathbb{N}_p$, $\partial_j f$ est définie et continue sur U.

NB : d'après le théorème précédent *in fine*, si la propriété ci-dessus est vraie pour *une* base de E, elle est vraie pour *toute* base de E ; il est donc loisible de dire “f est de classe $\mathcal{C}^1$” au lieu de “f est de classe $\mathcal{C}^1$ relativement à la base $\mathcal{B}$”.

II - Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ – Applications

1) L'algèbre $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$

On note $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les résultats suivants s'obtiennent à partir des dérivées partielles.

Si f,g sont dans $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors $\lambda.f+g$ est dans $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ et

$$\forall a\in U\quad \mathrm{d}(\lambda.f+g)(a)=\lambda.\mathrm{d}f(a)+\mathrm{d}g(a).$$

Si f,g sont dans $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$, $f\times g$ aussi et

$$\forall a\in U\quad \mathrm{d}(f\times g)(a)=f(a).\mathrm{d}g(a)+g(a).\mathrm{d}f(a)$$

Si $f\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ ne s'annule pas, $\dfrac{1}{f}\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ et

$$\forall a\in U\quad \mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)(a)=-\frac{1}{f(a)^2}.\mathrm{d}f(a)$$

2) Composition – Règle de la chaîne

Théorème : Soient $\varphi: I\to U$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ; alors $f\circ\varphi: I\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec :

$$\forall t\in I\quad (f\circ\varphi)'(t)=\mathrm{d}f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$$

Calcul pratique : supposons pour fixer les idées $E=\mathbb{R}^3$ et $\varphi(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\big(x(t),y(t),z(t)\big)=x'(t).\frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t)\big)+y'(t).\frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t)\big)+z'(t).\frac{\partial f}{\partial z}\big(\varphi(t)\big)$$

Dém. Soient $t\in I$ et h réel tel que $t+h\in I$; je cherche un développement limité à l'ordre 1 en t pour $g=f\circ\varphi$; j'écris en vertu des hypothèses, en posant $a=\varphi(t)$ et $v=\varphi'(t)$:

$$\begin{aligned}\varphi(t+h)&=a+h.v+h.\varepsilon(h)\quad\text{avec}\quad\lim_0\varepsilon=0\\ f(a+k)&=f(a)+\mathrm{d}f(a)\cdot k+\|k\|.\eta(k)\quad\text{avec}\quad\lim_0\eta=0\end{aligned}$$

J'ai alors

$$\begin{aligned}g(t+h)&=f\big(a+h.v+h.\varepsilon(h)\big)\\ &=f(a)+\mathrm{d}f(a)\cdot(h.v+h.\varepsilon(h))+\|h.v+h.\varepsilon(h)\|.\eta(h.v+h.\varepsilon(h))\\ &=f(a)+h.\mathrm{d}f(a)\cdot v+h.\big[\mathrm{d}f(a)\cdot\varepsilon(h)+\mathrm{sgn}(h).\|v+\varepsilon(h)\|.\eta(h.v+h.\varepsilon(h))\big]\end{aligned}$$

et le contenu du dernier crochet admet pour limite 0 lorsque h tend vers 0, du fait que ε et η admettent 0 pour limite en 0 et que l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ est continue en 0 (dimension finie). J'ai donc prouvé

$$g(t+h)\underset{h\to0}{=}g(t)+h.\mathrm{d}f(a)\cdot v+o(h)\ ;$$

donc g est dérivable en t (cela pour tout t de I) avec

$$g'(t)=\mathrm{d}f(a)\cdot v=\mathrm{d}f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t).$$

En particulier, si $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E et si φ se décompose sous la forme

$$\varphi: t\mapsto\sum_{j=1}^{p}x_j(t).e_j\quad\text{alors}\quad\varphi'(t)=\sum_{j=1}^{p}x_j'(t).e_j$$

et j'obtiens par linéarité :

$$\forall t\in I\quad g'(t)=\sum_{j=1}^{p}x_j'(t).\mathrm{d}f\big(\varphi(t)\big)\cdot e_j=\sum_{j=1}^{p}x_j'(t).\partial_j f\big(\varphi(t)\big)$$

Il en résulte que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et le théorème est démontré.

Interprétation géométrique

La fonction φ peut être considérée comme définissant un arc paramétré dans E, la dérivée de $f\circ\varphi$ est parfois appelée *dérivée le long de l'arc $\mathcal{C}^1$ défini par φ.*

Exemples d'utilisation (hypothèses à préciser)

Le théorème précédent permet de calculer des dérivées partielles, en fixant toutes les variables sauf une.

- si $g(u,v) = f(a.u + b.v, c.u + d.v)$, alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= a.\frac{\partial f}{\partial x}(a.u+b.v,c.u+d.v) + c.\frac{\partial f}{\partial y}(a.u+b.v,c.u+d.v) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= b.\frac{\partial f}{\partial x}(a.u+b.v,c.u+d.v) + d.\frac{\partial f}{\partial y}(a.u+b.v,c.u+d.v) \end{aligned}$$

- *Coordonnées polaires* : si $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) &= \cos\theta.\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) + \sin\theta.\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) &= -r\sin\theta.\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) + r\cos\theta.\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) \end{aligned}$$

  On écrit souvent abusivement :

$$\left\{\begin{array}{l} r.\dfrac{\partial g}{\partial r} = x.\dfrac{\partial f}{\partial x} + y.\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = -y.\dfrac{\partial f}{\partial x} + x.\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta.\dfrac{\partial g}{\partial r} - \sin\theta.\dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial g}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta.\dfrac{\partial g}{\partial r} + \cos\theta.\dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial g}{\partial \theta} \end{array}\right.$$

Application : changement de variables dans une équation aux dérivées partielles.

III - Gradient et applications

Dans cette section, E désigne un espace vectoriel euclidien, $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

1) Gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Propriété et définition : soient U ouvert de E et $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$.

Pour tout a de U, $\mathrm{d}f(a)$ est une forme linéaire sur E ; on appelle *gradient de f en a* l'unique vecteur de E $\nabla f(a)$ (noté aussi $\mathrm{grad}\, f(a)$) tel que

$$\forall h \in E \quad \mathrm{d}f(a)\cdot h = (\nabla f(a)\,|h).$$

Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E, alors

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).e_j.$$

L'application $\nabla f : U \to E$ est continue sur U.

Exemple : "gradient en coordonnées polaires".

2) Inégalité des accroissements finis

Théorème : soient U ouvert convexe de E, $M \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ tels que :
$\forall x \in U \quad \|\nabla f(x)\| \leq M$; alors

$$\forall (a,b) \in U^2 \quad |f(b) - f(a)| \leq M.\|b-a\|.$$

Dém. Fixons $(a,b) \in U^2$; je définis sur $[0,1]$ les applications $\varphi : t \mapsto (1-t)\cdot a + t\cdot b$ et $g : t \mapsto f\big(\varphi(t)\big)$. φ est à valeurs dans U car U est convexe, de classe $\mathcal{C}^1$ (TOC), donc $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. De plus

$$\forall t \in [0,1] \quad g'(t) = \mathrm{d}f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t) = \big(\nabla f\big(\varphi(t)\big)\,|b-a\big)$$

d'où (inégalité de Cauchy-Schwarz) : $\forall t \in [0,1] \quad |g'(t)| \leq M.\|b-a\|$.
L'inégalité des accroissements finis (pour les fonctions numériques d'une variable réelle) appliquée à g sur $[0,1]$ donne donc le résultat, puisque $g(1) = f(b)$ et $g(0) = f(a)$.

Définition : une partie A de E est dite *étoilée par rapport à* $\omega \in E$ si et seulement si $\forall u \in A\ [\omega, u] \subset A$. Une partie A de E est dite *étoilée* si et seulement s'il existe $\omega \in E$ tel que A soit étoilée par rapport à ω.

Propriété : si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert étoilé de E, alors f est constante sur U si et seulement si $\mathrm{d}f(a)$ est nulle pour tout a de U (*i.e.* toutes les dérivées partielles de f sont identiquement nulles sur U).

Attention ! Résultat faux sur un ouvert quelconque (cf. une fonction "en escalier" sur une réunion d'ouverts disjoints).

Exemple : étudier $f : (x, y) \mapsto \arctan x + \arctan y - \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$.

3) Points critiques – Extremums locaux

Définition : soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.

1) f admet un *maximum local en* a si et seulement si : $\exists \delta > 0 \quad \forall u \in B(a, \delta) \quad f(u) \leq f(a)$.

2) f admet un *minimum local en* a si et seulement si : $\exists \delta > 0 \quad \forall u \in B(a, \delta) \quad f(u) \geq f(a)$.

3) Si en outre f est de classe $\mathcal{C}^1$, a est *un point critique de* f si et seulement si $\mathrm{d}f(a) = 0$ (*i.e.* toutes les dérivées partielles de f sont nulles en a).

Condition nécessaire d'extremum local

Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ admet un extremum local en $a \in U$ (U ouvert), alors a est un point critique de f.

Attention ! Réciproque fausse ! (cf. $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ en $(0, 0)$).

Remarques pratiques

1) On commence par rechercher les points critiques à l'aide des dérivées partielles de f, puis on étudie localement le signe de $f(a+h) - f(a)$ au voisinage de chaque point critique a.

2) Penser à utiliser les **extremums globaux pour une fonction continue sur une partie fermée bornée.**

Exemples : 1) Déterminer les extremums de $f : (x, y) \mapsto x^2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ sur le disque fermé $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 9\}$.

2) Déterminer le maximum du produit xyz pour x, y, z réels positifs de somme 1.

3) Déterminer les extremums de $f : (x, y) \mapsto xy^2 + \ln(1 + y^2)$.

IV - Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$

Comme les dérivées partielles d'une fonction f de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ sont encore des fonctions de U dans $\mathbb{R}$, on définit par récurrence les *dérivées partielles successives* et les fonctions *de classe* $\mathcal{C}^k$. On définit enfin les fonctions *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ comme étant les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'ensemble $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur U est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Notations : si f admet une dérivée partielle seconde

$$\partial_i(\partial_j f) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right),$$

cette dernière est également notée

$$\partial^2_{i,j} f \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

(les "opérateurs de dérivation" s'appliquent successivement, le plus à droite en premier).

Théorème de Schwarz : si $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et si $\mathcal{B}$ est une base de E on a
$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Dém. Hors programme.

Contre-exemple : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = 0 \quad \text{si} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad f(x,y) = y^2 \sin \frac{x}{y} \quad \text{si} \quad y \neq 0.$$

Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et sont distinctes.

V - Applications géométriques

1) Notion de nappe paramétrée

a) Vocabulaire

On appelle *nappe paramétrée* de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) tout couple $\Sigma = (U, \phi)$ où ϕ est une application de classe $\mathcal{C}^k$ de U, ouvert de $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{R}^3$.

On appelle *point de la nappe* tout couple $\big((u,v), M\big)$ où $M = \phi(u,v)$.

Le *support de la nappe* est $\mathcal{S} = \big\{\phi(u,v),\ (u,v) \in U\big\}$ (c'est une *surface*, dans $\mathbb{R}^3$).

Les courbes paramétrées par $u \mapsto \phi(u,v)$ (v fixé) (resp. $v \mapsto \phi(u,v)$, u fixé) sont appelées *lignes coordonnées.* Elles sont *tracées sur* $\mathcal{S}$.

Le point $\big((u,v), M\big)$ est dit *régulier* si et seulement si $\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial \phi}{\partial v}(u,v)\right)$ est libre (ces *vecteurs dérivées partielles* sont définis par leurs coordonnées, qui sont les dérivées partielles des applications coordonnées de ϕ).

Si c'est le cas le *plan tangent* à Σ en $\big((u,v), M\big)$ est $M + \operatorname{Vect}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial \phi}{\partial v}(u,v)\right)$ et

la *normale* à Σ en $\big((u,v), M\big)$ est $M + \mathbb{R}.\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \phi}{\partial v}(u,v)\right)$.

NB : 1) On parle souvent du plan tangent (resp. de la normale) à $\mathcal{S}$ en M.

2) En éliminant u, v entre les trois relations fournies par $\phi(u,v) = (x,y,z)$, on peut parfois obtenir une *équation cartésienne* de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire une condition nécessaire et suffisante sur (x,y,z) pour que le point de coordonnées (x,y,z) appartienne à $\mathcal{S}$.

3) Dans le cas particulier où $\phi : (x,y) \mapsto (x, y, f(x,y))$, on parle de *paramétrage cartésien* ; $\mathcal{S}$ admet trivialement $z = f(x,y)$ pour équation cartésienne. Tout point est régulier.

4) Pour un autre éclairage sur ces remarques, voir le paragraphe sur les fonctions implicites.

b) Exemples

1) $\phi : (\varphi, \theta) \mapsto (R \sin\theta \cos\varphi, R \sin\theta \sin\varphi, R\cos\theta)$ (où $R > 0$ est fixé)

Ici $\mathcal{S}$ est la sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, les lignes coordonnées sont les *parallèles* (pour θ fixé) et les *méridiens* (pour φ fixé).

2) $\phi : (r, \theta) \mapsto \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \dfrac{r^2}{2p}\right)$ et $\psi : (x,y) \mapsto \left(x, y, \dfrac{x^2+y^2}{2p}\right)$ (où $p > 0$ est fixé)

Ici $\mathcal{S}$ est le paraboloïde de révolution d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 2pz$, dont ϕ et ψ fournissent deux paramétrages.

On peut noter que l'origine est un point régulier pour ψ mais pas pour ϕ (alors qu'il y a bien un plan tangent, au sens géométrique du terme...).

2) Tangente à une courbe plane en un point régulier

a) *Le théorème des fonctions implicites dans le plan* (hors programme)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur U ($k \geq 1$) et $(a, b) \in U$ tel que

$$f(a,b) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0.$$

Alors il existe :

- deux intervalles ouverts I, J de $\mathbb{R}$ tels que :
$$(a,b) \in I \times J \quad ; \quad I \times J \subset U \quad ; \quad \forall (x,y) \in I \times J \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0\ ;$$
- une application $\varphi : I \to J$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur I telle que
$$\forall (x,y) \in I \times J \quad f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)\,.$$

On dit que *la relation $f(x,y) = 0$ définit (localement) y comme fonction implicite de x.*

b) *Application* : tangente à une courbe plane

Soient $\mathcal{C}$ la "courbe plane" d'équation $f(x,y) = 0$, où $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition : soit $A = (a, b)$ un point de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire que $A \in U$ et $f(A) = 0$. On dit que A est *un point régulier de $\mathcal{C}$* si et seulement si $\nabla f(A) \neq 0$, auquel cas *la tangente à $\mathcal{C}$ en A* est la droite d'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A)\,.\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\,.\,(y-b) = 0$$

(c'est la normale à $\nabla f(A)$ passant par A).

NB : la notion de *point régulier* a déjà été définie au chapitre **9**, sur un arc paramétré, mais le contexte doit permettre de lever les ambiguïtés et l'on obtient bien la même tangente dans les cas où les deux définitions s'appliquent.

Exemple : tangentes à l'ellipse $\mathcal{E}\ /\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

c) Lignes de niveau

Avec les notations ci-dessus, je pose $\lambda = f(A)$, de sorte que le point A est sur la *ligne de niveau $\mathcal{L}_\lambda$ de f*, d'équation $f(x,y) = \lambda$. Alors, si le vecteur $\nabla f(A)$ n'est pas nul, il est orthogonal à $\mathcal{L}_\lambda$ (c'est-à-dire normal à sa tangente en A) et "orienté dans le sens des valeurs croissantes de f", c'est-à-dire que, si $B = A + h.\nabla f(A)$, avec $h > 0$ (suffisamment petit, c'est un résultat local !), alors $f(B) > \lambda$ (autrement dit B est sur une ligne de niveau $\mathcal{L}_\mu$ avec $\mu > \lambda$).

Noter que la commande `contour` de `matplotlib.pyplot` permet de tracer les lignes de niveau d'une fonction de deux variables réelles.

3) Plan tangent à une surface en un point régulier

a) *Le théorème des fonction implicites dans l'espace* (hors programme)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f : U \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur U ($k \geq 1$) et $(a, b, c) \in U$ tel que

$$f(a,b,c) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0.$$

Alors il existe :

- un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ et un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ tels que :
$$(a,b,c) \in V \times J \quad ; \quad V \times J \subset U \quad ; \quad \forall (x,y,z) \in V \times J \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \neq 0\ ;$$
- une application $\varphi : V \to J$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur V telle que
$$\forall (x,y,z) \in V \times J \qquad f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x,y)\,.$$

On dit que *la relation $f(x,y,z) = 0$ définit (localement) z comme fonction implicite de* (x, y).

b) *Application* : plan tangent à une surface

Soient $\mathcal{S}$ la “surface” d'équation $f(x,y,z)=0$, où $f:U\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Définition : soit $A=(a,b,c)$ un point de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire que $A\in U$ et $f(A)=0$. On dit que A est *un point régulier de* $\mathcal{S}$ si et seulement si $\nabla f(A)\neq 0$, auquel cas *le plan tangent à* $\mathcal{S}$ *en* A est le plan d'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A).(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(A).(y-b)+\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c).(z-c)=0$$

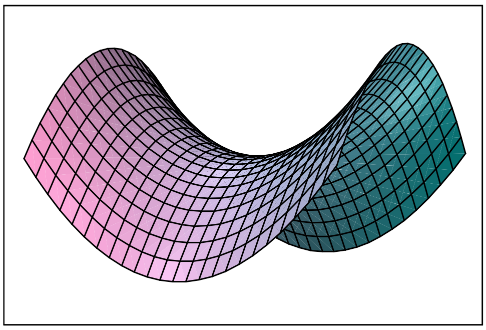
(c'est le plan normal à $\nabla f(A)$ passant par A).

NB : la notion de *point régulier* a déjà été définie au **§V-1**, sur une nappe paramétrée, mais le contexte doit permettre de lever les ambiguïtés et l'on obtient bien le même plan tangent dans les cas où les deux définitions s'appliquent.

c) Courbes tracées sur une surface

On dit qu'un arc paramétré par $t\mapsto F(t)$, est *tracé sur la surface* $\mathcal{S}$ lorsque, pour tout t, $F(t)\in\mathcal{S}$.

Par exemple, si $\mathcal{S}$ est le support d'une nappe paramétrée par $\phi:(u,v)\mapsto\phi(u,v)$, alors les *courbes coordonnées*, paramétrées par $u\mapsto\phi(u,v)$ (v fixé) et $v\mapsto\phi(u,v)$ (u fixé), sont tracées sur $\mathcal{S}$. En particulier, si $\mathcal{S}$ admet une équation cartésienne de la forme $z=g(x,y)$, elle est le support de la nappe paramétrée par $(x,y)\mapsto\big(x,y,g(x,y)\big)$ et les courbes coordonnées sont tracées dans des plans parallèles à xOz (pour y fixé) et yOz (pour x fixé). Ce sont ces courbes que tracent les machines pour afficher un “maillage” de la surface :



Paraboloïde hyperbolique, d'équation : $z=x^2-y^2$

Si $\mathcal{S}$ a pour équation cartésienne $f(x,y,z)=0$, où $f:U\to\mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^3$, et si $F:t\mapsto\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ est à valeurs dans U et $\mathcal{C}^1$ sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall t\in I\quad f\big(F(t)\big)=0\quad\text{(courbe tracée sur }\mathcal{S}\text{)},$$

alors en tout point $M=F(t)$ on a $F'(t)$ et $\nabla f(M)$ orthogonaux, c'est-à-dire que, si M est un point régulier de la courbe et de la surface, alors la tangente en M à la courbe est incluse dans le plan tangent en M à la surface. En effet, en dérivant par rapport à t la relation ci-dessus, on obtient

$$\forall t\in I\quad \mathrm{d}f(F(t))\cdot F'(t)=0\quad\text{soit}\quad\Big(\nabla f\big(F(t)\big)\,\big|\,F'(t)\Big)=0.$$

4) Calcul pratique des dérivées de fonctions implicites

On obtient les expressions des dérivées des fonctions “implicites” ci-dessus par la règle de la chaîne (la *dérivabilité* est fournie par le théorème des fonctions implicites correspondant).

Les dérivées sont toutes nulles puisque les expressions que l'on dérive sont constantes !

En effet, dans le premier cas,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x,\varphi(x))\big)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))+\varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))=0\,;$$

dans le second cas,

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(f(x,y,\varphi(x,y))\big)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))=0$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(f(x,y,\varphi(x,y))\big)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))=0.$$